LES INTERETS COMPOSES

1. Principe et champ d'application

Un capital est dit placé à intérêt composé, lorsqu'à l'issue de chaque période de placement, les intérêts simples produits sont ajoutés au capital pour porter eux même intérêts à la période suivante au taux convenu. On parle alors d'une capitalisation des intérêts. Cette dernière opération est généralement appliquée lorsque la durée de placement dépasse un an.
La distinction fondamentale entre intérêts composés et intérêts simples réside donc dans la capitalisation. A la fin de chaque période, les intérêts acquis au cours de cette période ne sont pas exigibles par le bénéficiaire.

Exemple :
Calcul des intérêts produits par un capital de 10.000 U/M placé pendant 3 ans au taux de 5%.

	Capital placé à intérêts simples			Capital placé à intérêts composés		
années	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital à la fin de la période	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital à la fin de la période
1	10.000	500	10.500	10.000	500	10.500
2	10.000	500	10.500	10.500	525	11.025
3	10.000	500	10.500	11.025	551,25	11.576,25
		1.500			11.576,25	

2. Valeur acquise par un capital placé pendant un nombre entier de périodes

Soit :
C : le capital initial,
i : le taux d'intérêt par période pour une durée d'un an (pour un taux de 8 %, i = 0,08)
n : nombre de périodes de placement,
C_n : Valeur acquise par le capital C pendant *n* périodes

Le tableau qui suit présente la méthode de calcul des intérêts et de valeur acquise à la fin de chaque période:

Période	Capital début de la période	L'intérêt de La période	Valeur acquise eu terme de la période
1 2 3 . . N	C C1 C2 . . Cn-1	C.i C1.i C2.i . . Cn-1.i	C1 = C + Ci = C (1+i) C2 = C1+ C 1.i = C1 (1+i) = C $(1+i)^2$ C3 = C2+ C2.i = C2 (1+i)= C $(1+i)^3$ . . Cn= Cn-1 + Cn-1.i = Cn-1 (1+i) = Cn-1 $(1+i)^n$

La valeur acquise par le capital C à la fin de *n* périodes au taux *i* est donc donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{C\boldsymbol{n} = C(1 + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}$$

Remarques :

- La formule $C_n = C(1 + i)^n$ n'est applicable que si le taux d'intérêt *i* et la durée *n* sont homogènes, c'est à dire exprimés dans la même unité de temps que la période de capitalisation. Si par exemple, il est convenu que les intérêts doivent être capitalisés à la fin de chaque mois, la formule ne sera applicable que si le taux d'intérêt est mensuel et que la durée de placement est exprimée en mois.
- Le tableau précédent montre que les valeurs acquises successives constatées à la fin des périodes 1,2,…,n, après capitalisation des intérêts sont en progression géométrique de raison (1+i), le premier terme de cette progression étant d'ailleurs le capital initial C.

***Exemple**:*

Une somme de 10.000 U/M est placée pendant 5 ans au taux annuel de 10%. 1/ Quelle somme obtient-on à l'issue de ce placement ?

2/ Si au bout de cette période de placement, on souhaite obtenir 20.000 U/M, quelle somme doit-on placer aujourd'hui ?

3/ Si la somme placée aujourd'hui est de 10.000 U/M, après combien de temps disposera-t-on d'une somme égale à 23.580 U/M?

4/ Si au bout de 5 ans la valeur acquise du placement est de 17.821 U/M, à quel taux le placement a été effectué ?

Solution :

1/ Valeur acquise :

$C_n = C\ (1 + i)^n$

$C_5 = 10.000\ (1 + 0,1)^5 = 16.105,1$ U/M

2/ Valeur actuelle correspondant à une valeur acquise de 20.000 U/M.

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$C = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n(1+i)^{-n}$$

$C = 20.000\ (1 + 0,1\ )^{-5} = 12.418,43$ U/M.

3/ Durée de placement :

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$23.580 = 10.000(1,1)^n$$

$$(1,1)^n = \frac{23.580}{10.000} = 2,3580$$

En s'aidant de la table financière N° 1, on trouve que cette valeur est comprise entre 9 ans et 10 ans.

Ou bien :

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$logC_n = logC + nlog\ (1+i)$$

$$n = \frac{\log C_n - \ logC}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log 23.580 - \ log10.000}{\log(1,1)}$$

$$n = 9,0002327$$

Soit **n = 9 ans.**

4/ Taux de placement

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$17.821 = 10.000(1+i)^5$$

$$(1+i)^5 = \frac{17.821}{10.000} = 1,7821$$

En s'aidant de la table financière N° 1, on trouve que cette valeur est comprise entre 12% et 12,5%.

A 12 %, on a :

$$(1,12)^5 = 1,762342$$

A 12,5 %, on a :

$$(1,125)^5 = \ 1,802032$$

En extrapolant, on obtient :
La différence entre 12,5% et 12 % est de 0,5%.
En valeur : 1,802032 – 1,762342 = 0,03969.
Le résultat obtenu, précédemment :

$$(1+i)^5 = 1{,}7821$$

Entre cette valeur et celle obtenue à 12%, la différence est :

1,7821 – 1,762342 = 0,019758

$$\begin{cases} 0{,}03969 & \rightarrow 0{,}005 \\ 0{,}016758 & \rightarrow x \end{cases}$$

On tire :

$x = 0{,}002489 \approx 0{,}0025$

Soit :

$i = 0{,}12 + 0{,}0025 = 0{,}1225$

Soit un taux de 12,25 %

On peut résoudre, également, de la manière suivante :

$$(1+i)^5 = 1{,}7821$$

$$ln(1+i)^5 = \ln(1{,}7821)$$

$$5\ln(1+i) = \ln(1{,}7821)$$

$$\ln(1+i) = \frac{\ln(1{,}7821)}{5}$$

$$\ln(1+i) = \frac{0{,}577792}{5}$$

$$\ln(1+i) = 0{,}115558$$

$$e^{\ln(1+i)} = e^{0{,}115558}$$

$$(1+i) = 1{,}1225$$

$$i = 1{,}1225 - 1$$

$$\boldsymbol{i = 0{,}1225}$$

Soit *taux* = 12,25 %

3. Calculs de la valeur acquise dans le cas d'un nombre de périodes non entier

Dans la construction de la formule générale $C_n = C(1 + i)^n$, nous avons considéré *n* comme un entier de période.

Dans le pratique, *n* peut être un nombre fractionnaire (par exemple : 5 ans et 4 mois, n = 5 + 4/12). Dans le cas où *n* est fractionnaire, il est envisagé deux solutions possibles :

1- utiliser la formule générale $C_n = C(1 + i)^n$ pour la partie entière, et utiliser les intérêts simples pour la partie fractionnaire.
Cette solution est appelée solution rationnelle.

2- Utiliser la formule générale $C_n = C(1 + i)^n$ de la manière que si n était entier.
C'est la solution commerciale.

La solution rationnelle :
On pose :

$$n = k + p/q$$

Avec : k = nombre entier
p/q = fraction de l'année avec q= 12.

Pour la partie entière de n, la valeur acquise est

$$C_k = C(1 + i)^k$$

Pour la partie fractionnaire de l'année

$$C_k \times i \times p/q = C(1+i)^k \times i \times p/q$$

Pour toute la période, on a :

$$C_n = C(1 + i)^k + C(1+i)^k \times i \times p/q = C(1+i)^k \times [1+ (i \times p/q)]$$

Exemple:
Calculer en utilisant la solution rationnelle, la valeur acquise par capital de 40.000 U/M placé à intérêts composés au taux de 6% pendant 5 ans et 7 mois.
La valeur acquise est :

$$C_{5 \text{ et } 7 \text{ mois}} = 40.000\ (1,06)^5.\ (1+0,06.\ 7/12)= 55402,53 \text{ DA.}$$

La solution commerciale :

$$C_n = C(1+i)^n\ (1+i)^{p/q}$$

Il s'agit d'étendre l'utilisation de la formule générale au cas où n est fractionnaire.

Exemple ***:*** (reprise de l'exemple précédent)

$$C_5 = 40.000\ (1,06)^5\ (1,06)^{7/12}= (1,338225).(1,034574) = 55\ 379,71 \text{ DA}$$

On constate une différence entre la solution commerciale et la solution rationnelle. La valeur acquise avec la solution commerciale est inférieure à celle obtenue avec la solution rationnelle.
Cela s'explique par le fait dans la solution commerciale, la variable n est continue dans l'expression $(1+i)^n$ (courbe exponentielle), alors que dans la solution rationnelle la courbe est brisée.

4. Les taux équivalents

Les taux d'intérêt sont généralement exprimés en taux annuels. Mais, on peut considérer une période plus courte que l'année, par exemple, le semestre, le trimestre le mois ou le jour. De même, les intérêts peuvent être capitalisés chaque semestre, chaque trimestre, chaque mois ou chaque jour. Ainsi, lorsque le taux d'intérêt est annuel et l'on considère une période inférieure à l'année, le taux d'intérêt prévalant pour cette période devra être calculé.

Un taux i_k, correspond à une période k fois plus petite que l'année, est équivalent à un taux annuel i si, pour un même capital placé, la valeur acquise au terme des $k.n$ périodes est égale à celle obtenue au taux i à la fin de n années de placement.

Soit :
C : le capital initialement placé ;
i : le taux annuel d'intérêt ;
i_k : le taux d'intérêt relatif à une subdivision périodique k fois plus petite que l'année avec : k=2 (si la subdivision est le semestre) ; k=4 (si la subdivision est le trimestre) ; k=12 (si la subdivision est le mois).

Ainsi:

$$C_n = C(1 + i)^{n} = (1+i_k)^{kn} \rightarrow i= (1+i_k)^{k} -1$$

$$\rightarrow i_k= (1+i)^{1/k} -1$$

Exemple :
Calculer le taux mensuel ; trimestriel et semestriel équivalents au taux annuel de 5%.

Taux mensuel équivalent (k=12):
$i_{12} = (1,05)^{1/12} -1=0,004074$, soit 0,407%.

Taux trimestriel équivalent (k=4)
$i_4= (1,05)^{1/12} -1 = 0,02272$ soit 1,23% ;

Taux semestriel (k=2) :
$i_2 = (1,05)^{1/2} -1=0,024695$ soit 2,47%.

5. Capitalisation fractionnée et taux nominal

Le taux nominal est un taux d'intérêt qui est toujours exprimé sur une base annuelle mais qui ne prends pas en considération l'ajout des intérêts composés.
Considérons une capitalisation par *1/k* d'année.

On pose:

$$j_k = k \times i_k$$

Le taux j_k est le taux annuel proportionnel au taux *im* par période *1/k* d'année.

Contrairement au taux $i = (1 + i_k)^k - 1$ qui est un taux annuel effectif, le taux j_k est un taux annuel purement nominal. j_k est le taux annuel nominal en cas de capitalisation par *k-ième*, correspondant au taux annuel effectif *i*.

L'appellation de taux nominal se réfère au fait qu'il s'agit d'une valeur théorique qui correspond à une définition donnée a priori, mais non toujours à la réalité économique.

On a:

$$j_k = k[(1 + i)^{1/k} - 1]$$

Soit:

$$i = (1 + j_k/k)^k - 1$$

***Exemple* :**

1- Si $i_{12} = 1\%$ alors

$$j_{12} = 12 \times 1\% = 12\%.$$

j_{12} est le taux annuel nominal en cas de capitalisation mensuelle.

Le taux annuel effectif équivalent est :

$$i = (1 + 1\%)^{12} - 1 = 12{,}68\%$$

2- Dans un acte de prêt hypothécaire, on lit que « l'intérêt est de 10% payable par trimestre ».

- Quel est le taux d'intérêt annuel effectif ?
- Quel est le taux d'intérêt nominal ?
- Quel est le taux d'intérêt trimestriel ?

La clause signifie que le taux d'intérêt est de 2,5% par trimestre : $i_4 = 2{,}5\%$.

10% est donc un taux nominal : $j_4 = 10\%$.

Le taux d'intérêt annuel effectif est donc : $i = (1 + 2{,}5\%)^4 = 10{,}38\%$ et non de 10%.

Le taux effectif est donc supérieur au taux nominal (sauf si $m < 1$, en cas de capitalisation biennale par exemple).

Récapitulation des différents taux d'intérêts selon un taux de 12%.

fréquence	Répétition par année (m)	Taux d'intérêt nominal Jm	Taux proportionnel	Taux d'intérêts effectif annuel
Annuelle	1	12%	12 ,000%	12,000%
Semestrielle	2	12%	6,000%	12,360%
Trimestrielle	4	12%	3,000%	12,550%
mensuelle	12	12%	1,000%	12,683%
Quotidienne	365	12%	0,033%	12,747%

Si le taux nominal est 12%, le taux annuel effectif est : 12% avec capitalisation annuelle, 12,36% avec capitalisation semestrielle, etc.