Module : Techniques et pratiques de statistique en Démographie

Etudiants : 2eme Année licence (S4)

Assuré par : Mme HACHEM Amel

Département : Démographie

Faculté : Sciences Sociales

Cours 5 : Variable Aléatoire Discrète et loi de probabilité

1-Rappel de définition d'une variable discrète :

Soit x une variable pouvant prendre l'ensembles des valeurs : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9………., x_n , avec les probabilités P_1, P_2 , P_3, P_4, P_5,…….., P_n respectivement , telles que $P_1 + P_+ \ P_{3+} P_{4+} P_{+ \ldots\ldots +} P_n = 1 = \sum_{i=1}^{n} Pi$.

On dit que x est une variable **discrète** si elle ne peut prendre que des valeurs isolées et variable **aléatoire** si sa valeur est fixée par le résultat d'une épreuve .

Donc toutes les variables qui sont associées à une épreuve aléatoire et qui prennent les valeurs numériques discontinues s'appellent variables aléatoires discrètes (ou discontinues).

2- Loi de probabilité :

On dit qu'on a définit une loi de probabilité (fonction de distribution) d'une variable aléatoire discontinue si on arrive à déterminer toutes les valeurs que peut prendre la variable x_i et toutes les probabilités correspondantes P_i .

On peut présenter une loi de probabilité par un ensemble des couples de valeurs associées de x_i et P_i , au moyen d'un tableau :

x_i	X_1	X_2	X_3	……	X_n	Σ
P_i	P_1	P_2	P_3	……….	P_n	1

Exemple n°1 :

On jette un dé équilibré une seule fois. Soit **x** la variable aléatoire désignant le nombre de points obtenus sur chaque face.

- Déterminer la loi de probabilité de cette variable ?
- Représenter graphiquement cette loi ?

Solution :

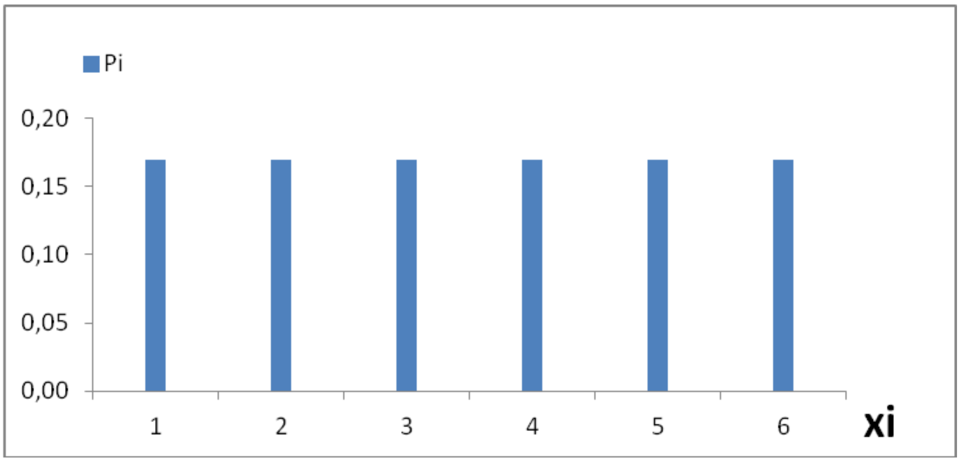
Loi de probabilité :

X_i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
P_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	6/6=1

Connaissant toutes les valeurs possibles de la variable x_i et les valeurs correspondantes de Pi , on a donc défini la loi de probabilité de cette variable.

- Représentation graphique de cette loi :

En portant les valeurs de x_i en abscisses et celles des Pi en ordonnées , on obtient un diagramme en bâtons.



Exemple n°2 :

On lance une paire de dés (deux Dés) . Soit x la somme de points obtenus .

- Déterminer la loi de probabilité de cette variable ?
- Représenter graphiquement cette loi ?

Solution :

Loi de probabilité : 2= 1+1

D1 / D2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

10= 4 + 6

On remarque que les valeurs possibles de x sont toutes les valeurs entières de 2 à 12 ; cela veut dire x ∈ [2 ; 12] .

Ainsi les probabilités correspondantes :

Xi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	∑
Pi	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

Comment on a calculé ces Pi ?

1/36 = ? 1 c'est le nombre de répétitions de 2 dans le premier tableau (2 est cité une seule fois) .

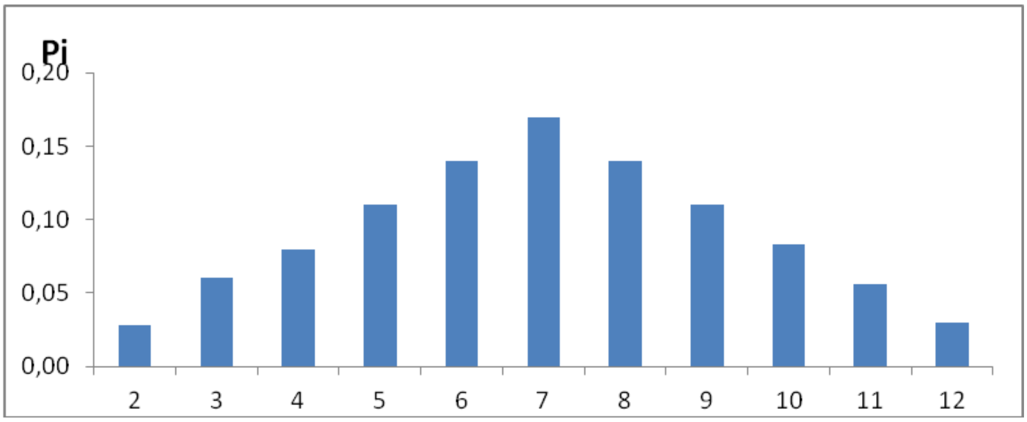
36 = ? puisqu'on a jeté deux Dés et comme chaque dé comporte 6 chiffres donc :

Dé1 et Dé2 = 6 et 6 = 6 * 6 = 36 (le et est remplacé par la multiplication en mathématique).

Donc on a bien défini la loi de probabilité de cette variable , puisqu'on a déterminé toutes les valeurs possibles de xi et les valeurs des probabilités correspondantes Pi .

On constate que $\sum_{i=1}^{11} \text{Pi} = 1$

- Représentation graphique :



3-Espérance mathématique et variance :

- L'Espérance mathématique :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discontinue (discrète) , notée E (x) vaut :

$$E(x) = (P_1.x_1) + (P_2.x_2) + (P_3.x_3) + \ldots.. + (P_n.x_n) = \sum_{i=1}^{n}(Pi\,.\,Xi\,)$$

- Pour l'exemple n° 1 :

$$E(x) = \left(\frac{1}{6}.1\right) + \left(\frac{1}{6}.2\right).\left(\frac{1}{6}.3\right).\left(\frac{1}{6}.4\right).\left(\frac{1}{6}.5\right).\left(\frac{1}{6}.6\right) = \frac{21}{6}$$

$$\Longrightarrow \quad E(x) = \frac{21}{6}$$

- Pour l'exemple n°2 :

$$E(x) = \left(\frac{1}{36}.2\right) + \left(\frac{2}{36}.3\right) + \left(\frac{3}{36}.4\right) + \left(\frac{4}{36}.5\right) + \left(\frac{5}{36}.6\right) + \left(\frac{6}{36}.7\right) + \left(\frac{5}{36}.8\right) + \left(\frac{4}{36}.9\right) + \left(\frac{3}{36}.10\right) + \left(\frac{2}{36}.11\right) + \left(\frac{1}{36}.12\right) = 7$$

$$\Longrightarrow \quad E(x) = 7$$

- La variance :

La variance d'une variable aléatoire discontinue (discrète) V(x) ou $\delta^2_{(x)}$ est définie par :

$\delta^2{}_{(x)} = \sum (Pi \cdot xi^2) - [E(x)]^2 \Longrightarrow$ Formule pratique

- Procédure de calcul de E(x) et V(x) d'une variable aléatoire discontinue :

- Reprenons l'exemple n°1 :

Xi	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Pi	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	6/6=1
Pi.Xi	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	$\sum$(Pi.Xi)=21/6
Pi . Xi ^{2}	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	$\sum(Pi.Xi^2)$=91/6

$\Longrightarrow$ $E(x) = \sum(Pi.Xi) = 21/6 = 3{,}5$

$\Longrightarrow$ $V(x) = [\sum(Pi.Xi^2)] - [E(x)]^2 = 91/6 - [(21/6)^2] = (91/6) - (441/36)$

$\Longrightarrow$ $V(x) = (546-441)/36 = 105/36 = 35/12 = 2{,}9$

4- Propriétés de l'espérance mathématique et de la variance :

- Esperance mathématique :

Théorème 1 :

Soit x une variable aléatoire et k un nombre réel . On a alors :

(i) $E(k) = k$ car $E(k) = \sum Pi \cdot k = k.\sum Pi$ et puisque $\sum Pi = 1$ donc :
$E(k) = k$

(ii) $E(x+k) = E(x) + k$. car :
$E(x+k) = \sum Pi\,(x+k) = \sum Pi \cdot k = E(x) + k \sum Pi = E(x) + k.$

Théorème 2 :

Soient x et y des variables aléatoires sur le même ensemble fondamental.

On a : E(x+y) = E(x) + E(y)

Théorème 3 :

Soient X1,X2,X3,X4…..,Xn des variables aléatoires sur le même ensemble fondamental , alors :

E(X1+X2+X3+X4+…+Xn) = E(X1)+ E(X2)+ E(X3)+ E(X4)+….E(Xn).

-La variance :

(i) V(k)=0 Sachant que k est chiffre réel

(ii) V(X+k)= V(X)

(iii) $V(kX) = K^2 V(X)$

(iv) V(X+Y) = V(X) +V(Y) sachant que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes .

5- Définition et présentation graphique de la fonction de répartition :

- La fonction de répartition F(x) est la fonction cumulative qui correspond à la courbe cumulative de la variable statistique . C'est un moyen (outil) pour le calcul des probabilités des lois.

C'est une fonction en forme d'escalier , toujours croissante .

Exemple : Soit à déterminer la fonction de répartition de la loi de probabilité définie par :

Xi	**2**	**5**	**6**	**8**	**∑**
Pi	**0,1**	**0,4**	**0,3**	**0,2**	**1**

F(x)=0 pour x< 2

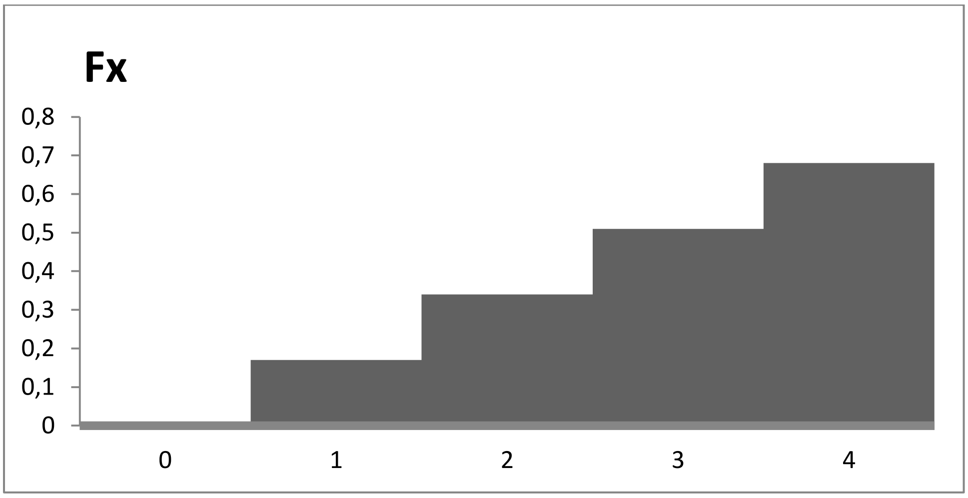
F(x)=0,1 pour 2≤X≤ 5

F(x)=0,1+0,4=0,5 pour 5≤X≤ 6

F(x)=0,1+0,4+0,3=0,8 pour 6≤X≤ 8

F(x)=0,1+0,4+0,3+0,2=1 pour X≥ 8

-Représentation graphique de la fonction de Répartition F(x) :



Exemple n°1 :

Calculer la fonction de répartition et construire le graphe correspond .

Solution :

F(x)=0 pour x< 1

F(x)=1/6= 0,17 pour 1≤X≤ 2

F(x)=0,17+0,17=0,34 pour 2≤X≤ 3

F(x)=0,17+0,17+0,17=0,51 pour 3≤X≤ 4

F(x)=0,17+0,17+0,17+0,17=0,68 pour 4≤X≤ 5

F(x)=0,17+0,17+0,17+0,17+0,17=0,85 pour 5≤X≤ 6

F(x)=0,17+0,17+0,17+0,17+0,17+0,17=1 pour X≥ 6

-La présentation graphique de F(x) :