Rappels Mathématiques

Mehdi Rouan Serik

30 mars 2020

Table des matières

1 Rappel d'analyse

1.1 L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{R}^n$ est muni du produit usuel $\langle .,. \rangle$ et la norme associée $\|.\|_2$. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ alors :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \tag{1}$$

$$\|\mathbf{u}\| \triangleq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \tag{2}$$

On définit ainsi d'autres normes sur $\mathbb{R}^n$ comme suit :

— La norme 1 : $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i$

— La norme 2 : $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

— La norme p : $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

— La norme sup : $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|\}$

1.2 Topologie de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Une boule ouverte de l'espace normé $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ centré en $\mathbf{u}$ et de rayon r est donnée par :

$$B(\mathbf{u}, r) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| < r\} \tag{3}$$

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une topologie naturelle : un sous-ensemble $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathcal{U}$ contient une boule ouverte centrée en $\mathbf{u}$. C'est la topologie engendrée par les boules ouvertes. Elle ne dépend pas de la norme considérée.

Propriété :

— $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

— Une réunion d'ouverts est un ouvert.

— Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

— Un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^n$ contient un unique ouvert maximal pour l'inclusion ; on le note $int(\mathcal{E})$ et on l'appelle l'intérieur de $\mathcal{E}$.

Un sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ est un fermé pour cette topologie si son complémentaire est un ouvert. Toute boule fermée $\overline{B(\mathbf{u}, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \leq r\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Propriété :

— $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

— Une réunion de fermés est un fermé.

— Une intersection finie de fermés est un fermé.

2 Rappel de calcul différentiel

2.1 Vecteur gradient

Soit f à valeur réelles définie comme $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Lorsque f est différentiable en $\mathbf{x_0}$, on défini le gradient ∇ comme suit :

$$\nabla f(\mathbf{x_0}) \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x_0}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

2.2 Matrice Hessienne

Soit f à valeur réelles définie comme $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Lorsque f est 2 fois différentiable en $\mathbf{x_0}$, on défini la matrice Hessienne ∇^2 comme suit :

$$\nabla^2 f(\mathbf{x_0}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x_0})\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix} \tag{5}$$

3 Rappel sur les matrices

3.1 Notations

On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times m$ à coefficients réels. Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ on note $A^\intercal$ sa matrice transposée. On notre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à valeurs réelles. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note son déterminant $det(A)$ et sa trace $tr(A)$.

3.2 Normes matricielles

On définit une norme matricielle compatible avec une norme vectorielle toute norme respectant : si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \, \|\mathbf{x}\|$. Voici quelques normes matricielles compatibles avec la norme euclidienne $\|.\|_2$:

— La norme de *Frobenius* :

$$\|A\|_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2} = tr(AA^\intercal) \tag{6}$$

— La norme induite par $\|.\|_2$:

$$\|A\|_{\sup} = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \tag{7}$$

— Si A est une matrice carrée diagonalisable, elle coïncide avec la norme spectrale :

$$\|A\|_s = \max \{|\lambda| \mid \lambda \text{ est une valeur propre de } A\} \tag{8}$$

3.3 Matrices (semi-) définie positive/négative

Une notion importante en optimisation est la propriété de la matrice Hessienne d'une application si elle est (semi-) définie positive ou négative.

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
La matrice A est semi-définie positive *si :* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^\intercal A \mathbf{x} \geq 0$
La matrice A est définie positive *si :* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \mathbf{x}^\intercal A \mathbf{x} > 0$

Dans le cas ou nous nous intéressons aux matrices symétriques (*i.e.* $A^\intercal = A$) réelles, le théorème suivant est important :

Théorème 3.3.1 (Symétrique réelle $\Longrightarrow$ diagonalisable.)**.** *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.*

Pour déterminer si une matrice symétrique est définie positive on utilise le théorème suivant :

Théorème 3.3.2 (Caractéristiques des matrices symétriques définie positives.)**.** *Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ une matrice symétrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est définie positive.

(ii) *Toutes les valeurs propres de A sont > 0.*

(iii) $\forall i = 0, \ldots, n, c_i > 0$, *où* $p_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i \lambda_i^n$ *est le polynôme caractéristique de A.*

(iv) *Les déterminants* $det(A_k)$ *où* $A_k = (a_{ij})_{i,j=1..k}$ *sont tous > 0.*

(v) *Il existe une matrice M inversible tel que $M^\intercal M = A$.*

De plus :

(a) *Si A est définie positive alors* $\forall i = 1, \ldots, n, a_{ii} > 0$.

(b) *Si* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A$ *est définie positive si et seulement si* $det(A) > 0$ *et* $tr(A) > 0$.

Pour déterminer si une matrice symétrique est définie positive on utilise le théorème suivant :

Théorème 3.3.3 (Caractéristiques des matrices symétriques semi-définie positive.)**.** *Soit* $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ *une matrice symétrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est semi-définie positive.*

(ii) *Toutes les valeurs propres de A sont ≥ 0.*

(iii) $\forall i = 0, \ldots, n, c_i \geq 0$, *où* $p_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i \lambda_i^n$ *est le polynôme caractéristique de A.*

(iv) *Les mineurs principaux de A sont tous ≥ 0.*

(v) *Il existe une matrice M inversible tel que $M^\intercal M = A$.*

De plus :

(a) *Si A est semi-définie positive alors* $\forall i = 1, \ldots, n, a_{ii} \geq 0$.

(b) *Si* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A$ *est définie positive si et seulement si* $det(A) \geq 0$ *et* $tr(A) \geq 0$.