# *Optimisation continue*

M. ROUAN-SERIK

Institut de maintenance et de sécurité industrielle IMSI
Université d'Oran 2 Mohamed Ben Ahmed.
mehdi.rouan@gmail.com

# Plan

# Vecteur $\nabla$ et Matrice Hessienne $\nabla^2$ I

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable en $\mathbf{x_0}$ on note :

$$\nabla f(\mathbf{x_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{x_1}(\mathbf{x_0}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{x_n}(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Le vecteur gradient de $f$ en $\mathbf{x_0}$ le développement de *Taylor-Young* à l'ordre 1 au voisinage de $\mathbf{x_0}$ donne :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + \langle h \nabla f(\mathbf{x_0}), \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \rangle + o\left(\| \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \|\right)$$

# Vecteur $\nabla$ et Matrice Hessienne $\nabla^2$ II

Lorsque l'application $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est 2 fois différentiable en $\mathbf{x_0}$ on note :

$$\nabla^2 f(\mathbf{x_0}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x_0})\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix}$$

Le développement à l'ordre 2 au voisinage de $\mathbf{x_0}$ s'écrit :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + \langle h \, \nabla f(\mathbf{x_0}), \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \rangle + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^T \nabla^2 f(\mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + o\left(\| \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \|^2\right)$$

# Vecteur $\nabla$ et Matrice Hessienne $\nabla^2$ III

**Rappel**

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-définie positive si $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$.

# Plan

# Compacité du domaine

- Si $\mathcal{K}$ est un compact (i.e fermé et borné) de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $f$ admet un minimum ainsi qu'un maximum global sur $\mathcal{K}$
- Ce résultat sera valable pour les problème d'optimisation avec contraintes seulement !
- Une application $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue est coercive si $\mathcal{D}$ est un fermé non borné et si :

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} f(\mathbf{x}) = +\infty$$

**Theorem**

*Une application coercive admet un minimum global (et aucun maximum global).*
*Si $-f$ est coercive, $f$ admet un maximum global (et aucun minimum global).*

# Plan

# Conditions nécessaires I

- Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x_0}$ est un extremum local de $f$ s'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant $\mathbf{x_0}$ tel que, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}$, $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x_0})$ (respectivement $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x_0})$). On dira que $\mathbf{x_0}$ est un minimum local de $f$ (respectivement maximum local).

1er ordre

**Theorem (Équation d'Euler)**

*Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, différentiable en $\mathbf{x_0} \in int(\mathcal{D})$. Si $\mathbf{x_0}$ est un extremum local de $f$ , alors $\mathbf{x_0}$ est un point critique, i.e. :*

$$\nabla f(\mathbf{x_0}) = 0$$

# Conditions nécessaires II

2nd ordre

**Theorem**

*Soit* $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *et* $\mathbf{u} \in int(\mathcal{D})$, *avec* $f$ *2 fois différentiable en* $\mathbf{u}$.

1. ***(Condition nécessaire du*** $2^{e}$ ***ordre.)*** *Si* $\mathbf{u}$ *est un minimum (resp. maximum) local de* $f$ *, alors* $\nabla f(\mathbf{u}) = 0$ *et* $\nabla^2 f(\mathbf{u})$ *est semi-définie positive (resp. négative).*
2. ***(Condition suffisante du*** $2^{e}$ ***ordre.)*** *Si* $\nabla f(\mathbf{u}) = 0$ *et* $\nabla^2 f(\mathbf{u})$ *est semi-définie positive (resp. négative), alors* $\mathbf{u}$ *est un minimum (resp. maximum) local de* $f$.

# Conditions nécessaires III

Exemple :

$$\text{soit } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$$

Son vecteur gradient en un point $(x, y)$ est :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 9y \\ 3y^2 - 9x \end{pmatrix}$$

et sa matrice Hessienne :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}$$

# Conditions nécessaires IV

Les points critiques, solutions de $\nabla f(x,y) = 0$ sont les 2 points $(0,0)$ et $(3,3)$. En ces points, les matrices Hessiennes sont :

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(3,3) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$$

- $\nabla^2 f(0,0)$ a une trace nulle et un déterminant strictement négatif, elle n'est donc ni semi-définie positive, ni semi-définie négative : $(0,0)$ n'est pas un extremum local.
- $\nabla^2 f(3,3)$ a une trace et un déterminant strictement positifs : $(3,3)$ est un minimum local.
- $f$ n'admet aucun extremum global puisque ni $f$ ni $-f$ ne sont coercives.

# Plan

# Espace et application convexe I

- $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C},\ \forall t \in [0,1], \quad t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in \mathcal{C}$$

- Soit $\mathcal{C}$ convexe non vide, $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C},\ \forall t \in [0,1], \quad tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}) \geq f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})$$

- $f$ est strictement convexe si :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y},\ \forall t \in ]0,1[, \quad tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}) > f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})$$

# Espace et application convexe II

**Theorem (Caractéristiques de la convexité)**

*Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.*

1. *(**à l'ordre 1**) Si $f$ est différentiable sur $\mathcal{U}$, alors :*
   a) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}, f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \iff f$ *est convexe sur* $\mathcal{U}$
   b) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \iff$ $f$ *est strictement convexe sur* $\mathcal{U}$
2. *(**à l'ordre 2**) Si $f$ est 2 fois différentiable sur $\mathcal{U}$, alors :*
   a) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \nabla^2 f(\mathbf{x})$ *est semi définie positive* $\iff f$ *est convexe sur* $\mathcal{U}$
   b) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \nabla^2 f(\mathbf{x})$ *est définie positive* $\Rightarrow f$ *est strictement convexe sur* $\mathcal{U}$

# Programmation convexe I

On parle de programme convexe lorsque :

- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à optimiser sur :

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \,|\, \varphi_i(\mathbf{x}) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, p,\ \ \psi_j(\mathbf{x}) \leq 0, \forall j = 1, \ldots, q\}$$

- L'ensemble $\mathcal{U}$ est un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$
- Les applications $\varphi_i$ de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont affines
- Les applications $\psi_j$ de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont convexes

# Programmation convexe II

**Theorem (Programmation convexe)**

*Soient $\mathcal{C}$ un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $\mathbf{x_0} \in \mathcal{C}$*

1. *Les conditions suivantes sont équivalents :*
   - (i) $\mathbf{x_0}$ *est un minimum local de* $f$
   - (ii) $\mathbf{x_0}$ *est un minimum global de* $f$

     *Si de plus $f$ est différentiable en $\mathbf{x_0}$ sur $\mathcal{C}$, $(i)$ et $(ii)$ sont équivalente à :*
   - (iii) *si* $\mathbf{x_0} \in int(\mathcal{C}), \nabla f(\mathbf{x_0}) = 0$
   - (iv) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \langle \nabla f(\mathbf{x_0}), \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \rangle \geq 0$
2. *Si $f$ est strictement convexe, elle admet au plus un minimum et il est toujours stricte s'il existe.*

# Plan

# Définitions I

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est quadratique : un polynôme de degré 2 qui a la forme suivante :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j}_{\text{forme quadratique}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_ix_i}_{\text{forme linéaire}} + \underbrace{c}_{\text{constante}}$$

# Définitions II

Pour l'écriture matricielle :

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1n} & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle + c$$

ou encore

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$$

# Application quadratique

**Theorem (Gradient et Hessienne)**

*Soit* $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle + c$ *alors* $f \in C^\infty$ *et :*

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= A\mathbf{x} - b, \\ \nabla^2 f(\mathbf{x}) &= A. \end{aligned}$$

**Theorem (Convexité)**

*Soit* $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle + c$ *alors :*

- $f$ *convexe* $\Longleftrightarrow$ $A$ *semi-définie positive.*
- $f$ *strictement convexe* $\Longleftrightarrow$ $f$ *fortement convexe* $\Longleftrightarrow$ $A$ *définie positive.*

# Programmation quadratique

**Theorem (Extremma)**

*Soit* $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle + c$ *et* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *alors les propositions suivantes sont équivalents :*

- $\mathbf{u}$ *est un minimum local de* $f$
- $\mathbf{u}$ *est un minimum global de* $f$
- $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ *i.e.* $\mathbf{u}$ *est solution de* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

*Si* $A$ *est définie positive* $f$ *admet un unique minimum global. Si* $A$ *n'est pas semi défini positive,* $f$ *n'admet aucun minimum global.*