LES INTERETS COMPOSES

1 – Principe de base

Un capital est dit placé à intérêts composés lorsque, à l'issue de chaque période de placement, les intérêts s'ajoutent au capital et portent eux même intérêts au taux initial. Ce principe est appelé "capitalisation des intérêts".

Conventionnellement, on est en intérêts composés dès que le placement excède une année. La règle générale est que l'intérêt soit payé à terme échu, c'est à dire à la fin de chaque période de placement.

2 – Formule de base

Soit une somme $\mathbf{C_0}$, placée pour $\boldsymbol{n}$ années, au taux d'intérêt annuel, à terme échu, $\boldsymbol{i}$. Au bout d'un an, cette somme devient $\mathbf{C_1}$:

$$\mathbf{C_1 = C_0 + C_0 * \boldsymbol{i}} \quad \text{soit } C_1 = \mathbf{C_0 (1+\boldsymbol{i})} \qquad (1)$$

La somme $\mathbf{C_1}$ porte intérêt pendant la seconde année et devient $\mathbf{C_2}$:

$$\mathbf{C_2 = C_1 (1+\boldsymbol{i})} \qquad (2)$$

En utilisant la relation (1), il vient :

$$C_2 = \mathbf{C_0 (1+\boldsymbol{i})^2}$$

D'une façon générale, à la fin de la *nième* année, la somme placée devient

$$C_n = \mathbf{C_0 (1+\boldsymbol{i})^n}$$

La formule de base est à fait générale. Elle reste valable si la période de capitalisation des intérêts n'est pas annuelle. On convient alors, que $\boldsymbol{n}$ est le nombre de période, et $\boldsymbol{i}$ le taux d'intérêt à terme échu versé pour une période.

3 – Utilisation de la formule de base

Soit une somme C_0**,** placée pour ***n*** périodes**,** au taux d'intérêt échu ***i*** pour une période.

- Valeur acquise par C_0 : c'est la somme C_n que l'on obtient au bout de ***n*** périodes.

$$\mathbf{C_n = C_0\,(1+}\boldsymbol{i}\mathbf{)^n}$$

- Valeur actuelle de C_n : c'est la somme C_0 qu'il faut placer aujourd'hui pour obtenir C_n dans ***n*** périodes.

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n(1+i)^{-n}$$

- Recherche du taux d'intérêt, connaissant la somme initiale, la somme finale et la durée du placement.

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 \qquad \text{soit} \qquad i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

- Recherche de la durée du placement, connaissant la somme initiale, la somme finale et le taux de placement.

$$n = \frac{\ln(C_n) - \ln(C_0)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\ln(1+i)}$$

- Montant total des intérêts ***I*** :

$$I = C_n - C_0 \qquad \text{Soit} \qquad I = C_0\left[(1+i)^n - 1\right]$$

4 – Amortissement d'un emprunt

Une personne emprunte le 01 / 01 / 2002, 100 000 DA au taux d'intérêt de 12,5 % pour 3 ans.

Pour se libérer de sa dette, elle verse 20 000 DA à l'issue de la 1ère année, et 40 000 DA à l'issue de la 2ème année. Combien devra-t-elle verser à l'issue de la 3ème année ?

a) Il est possible de résoudre le problème pas à pas en effectuant le tableau d'amortissement de cet emprunt.

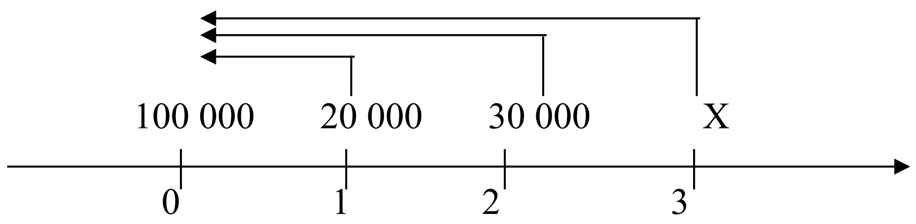
Chaque 1er janvier, le montant du remboursement est affecté prioritairement au paiement des intérêts sur le capital détenu pendant l'année écoulée. Le reste du remboursement est affecté à l'amortissement du capital.

Date	Capital dû	Intérêts dus	Remboursement	Amortissement	Capital restant
01 /01 /02	100 000,00				
01 /01 /03	100 000,00	12 500,00	20 000,00	7 500,00	92 500,00
01 /01 /04	92 500,00	11 562,50	40 000,00	28 437,50	64 062,50
01 /01 /05	64 062,50	8 007,81	**X**		

Pour qu'à l'issue de la troisième année, l'emprunteur soit totalement libéré de sa dette, il doit régler :

X = 64 062,20 + 8 007,81
X = 72 070,31 DA

b) Un échéancier permet de visualiser le problème. Appelons X la somme que l'on doit verser à l'issue de la 3ème année.



Valeur actuelle de la somme empruntée : 100 000 DA

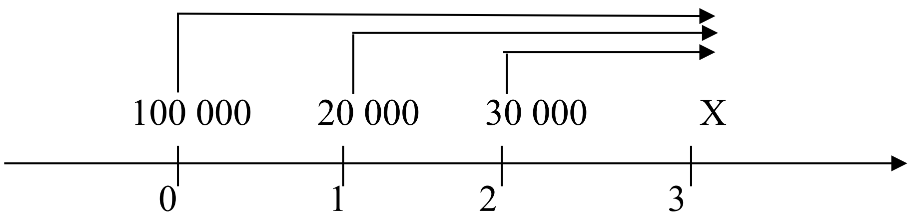
Valeur actuelle des remboursements : $\frac{20000}{(1{,}125)^1} + \frac{40000}{(1{,}125)^2} + \frac{X}{(1{,}125)^3}$

Il y a égalité entre les deux flux

$$100000 = \frac{20000}{(1{,}125)^1} + \frac{40000}{(1{,}125)^2} + \frac{X}{(1{,}125)^3}$$

X = 72 070,31 DA

c) Au lieu de raisonner en valeur actuelle, il était possible de n'utiliser que les valeurs acquises. L'échéancier devient :



Valeur acquise de l'emprunt : $100\,000\ (1{,}125)^3$

Valeur acquise des remboursements : $20\,000\ (1{,}125)^2 + 40\,000\ (1{,}125)^1 + X$

La nécessaire égalité entre ces flux donne :

$100\,000\ (1{,}125)^3 = 20\,000\ (1{,}125)^2 + 40\,000\ (1{,}125)^1 + X$

X = 72 070,31