cours I: Dimensions, systèmes d'unités et incertitudes

I-1 Introduction

La physique est une science qui décrit les phénomènes de façon qualitative et quantitative. Elle doit les caractériser par des grandeurs mesurables.

Ces grandeurs ont toutes une appellation et son caractérisées par les notions de dimension et unités. Ces notions peuvent être différentes pour une même grandeur physique, selon le système utilisé.

Les dimensions des grandeurs physiques ont fait l'objet de la première partie de ce cours.

En mesurant une grandeur physique plusieurs fois, nous pouvons constater que les mesures peuvent donner des résultats distincts. On ne peut donc savoir quelle mesure donne la valeur exacte de la grandeur physique. Cela veut dire que les instruments utilisés ne sont pas d'une précision infinie et que les résultats obtenus par les mesures présentent des incertitudes qu'il faut évaluer.

Pour que lamesure d'une grandeur physique soitcorrecte, l'expérimentateur doit faire attention à l'environnement dans lequel elle est effectuée. L'environnement doit être le moins perturbé possible afin que l'erreur soit minimale. Dans toutes les mesures il existe donc des erreurs. La notion d'erreur ou incertitude est traitée dans la dernière section de cette partie.

I-2 Dimensions

I-2-a Définition d'une grandeur physique

Une grandeur physique est une caractéristique que l'on attribue à un objet ou à un phénomène ayant lieu dans l'espace et le temps. Parmi l'ensemble des grandeurs physiques, certaines sont considérées indépendantes. Elles sont dites grandeurs de base ou grandeurs fondamentales.

Il existe sept grandeurs fondamentales.Le reste,dites grandeurs dérivées, sont définies au moyen de relation algébriques liant grandeurs fondamentales.Par d'exemple, une grandeur X peut être donnée par une relation liant deux grandeurs A, B et des coefficientsfixes C, α et β: $X=C.A^{\alpha}.B^{\beta}$.

I-2-b Les dimensions

La dimension précisela nature d'une grandeur physique.Cette notion est plus générale que la notion d'unité. La dimension est représentée par une ou plusieurs lettres majuscules. Chaque grandeur physique A a une dimension, notée:

$$\dim A=[A]$$

Exemples:

La masse, la vitesse et l'énergie sont des grandeurs différentes et donc de dimensions différentes.

I-2-b-i Les sept dimensions fondamentales

En physique, les sept grandeurs fondamentales ou de base avec symboles et dimensions sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Grandeurs physiques fondamentales.

Grandeurs	Symbole	Dimension
Longueur	l,x,r	[l]=L
Masse	m	[m]=M
Temps	t	[t]=T
Intensité électrique	i	[i]=I
Température	T	[T]=θ
Quantité de matière	n	[n]= N
Intensité lumineuse	Iv	[Iv]=J

I-2-b-ii Opérations sur les dimensions

Les dimensions des grandeurs physiques obéissent à quelques règles de mathématiques de base :

On ne peut additionner que des grandeurs ayant la même dimension.

$a = b + c \Rightarrow [a] = [b + c] = [b] + [c]$

La dimension d'unu produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune.

$a = b.c \Rightarrow [a] = [b.c] = [b] .[c]$

Pour une grandeur qui s'écrit b^{α}

$[b^{\alpha}] = [b]^{\alpha}$. α étant un nombre réel.

La dimension d'une constante est égale à 1. Exemple [2]=1.

Les angles sont sans dimension mais ont une unité. [Angle]=1.

Les fonctions sin(x), cos(x), tan(x), Ln(x), log(x) et exp(x) sont sans dimensions.

I-2-b-iii Equations aux dimensions

Les équationsaux dimensions consistent à ramener les différents paramètres, qui interviennent dans une équation ou loi physique, aux grandeurs fondamentales du système des unités international (voir paragraphe I-2). Ce sont des équationsqui relient la dimension d'une grandeur G à celles des grandeurs de base; dont elle dérive. Dans ce cas la dimension de toute grandeur G peut se mettre sous la forme:

$$[G] = [\ M^a.L^b.T^c.I^d.\ \theta^e.\ N^f J^g$$

I-2-b-iv Dimension d'une grandeur dérivée

Pour calculer la dimension d'une grandeur physique dérivée (non fondamentale), nous avons besoin d'équation, qui la relie aux grandeurs fondamentales.Cela est également possible en utilisant l'unitéde la grandeur.

Exemples :

La vitesse:

A partir de l'équation: V = (dx/dt) $\Rightarrow$ $[V] = L.T^{-1}$.
A partir de l'unité : unité de V : m/s $\Rightarrow$ $[V] = L.T^{-1}$.

L'accélération:

A partir de l'équation: a = (dV/dt) $\Rightarrow$ $[a] = L.T^{-2}$.
A partir de l'unité: unité de a: m/s^2 $\Rightarrow$ $[a] = L.T^{-2}$.

Dans le tableau ci-dessous, nous donnons quelques exemples de grandeurs dérivées et leurs dimensions.

Dimensions de quelques grandeurs dérivées.

Grandeur	Equation	Dimension
Vitesse angulaire, pulsation: ω	α/t	T^{-1}
Accélération angulaire$\dot{\alpha}$	ω/t	T^{-2}
Fréquence: f	1/T	T^{-1}
Force:F	m.a	$M.L.T^{-2}$
Moment d'inertie: J	$m.l^2$	$M.L^2$
Pression:pr	F/S	$M.L^{-1}.T^{-2}$
Travail:W	F.d	$M.L^2.T^{-2}$
Puissance:P	W/t	$M.L^2.T^{-3}$
Charge:Q	i.t	I.T
Potentiel:V	P/i	$M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$
Champ électrique: E	V/l	$M.L.T^{-3}.I^{-1}$
Capacité:C	Q/V	$M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2$
Résistance:R	V/i	$M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$
Champmagnétique:B	F/q.V	$M.T^{-2}.I^{-1}$
Inductance:L	V/(di/dt)	$M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$

I-2-b-v Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet:

1- De déterminer la dimension et l'unité d'une grandeur physique dérivée, en fonction des dimensions et des unités des grandeurs fondamentales.

2- D'effectuer des changements d'unités.

3- De vérifier l'homogénéité des formules : $A = B \Rightarrow [A] = [B]$.

L'analyse de l'homogénéité d'une équation estun outil permettant la détection d'erreurs dans une loi. Une équation nonhomogène est nécessairement fausse.

I-3 Systèmes d'unités

I-3-a Mesure d'une grandeur

Pour mesurer une grandeur physique X, Ilsuffit de la comparerà une même grandeur physique de valeur différente, prise comme référence. Cette dernière constitue ce qui s'appelle un étalon.

La valeur d'une grandeur physique X est généralement sous la forme du produit de son unité par un nombre réel. Pour certaines grandeurs particulières, Plusieurs unités différentes peuvent être utilisées. Par exemple, dans le cas de la vitesse d'un objet, V peut s'écrire sous la forme:

$$V = 25 m/s \text{ ou bien } V = 90 Km/h.$$

I-3-b Système d'unités International

Il est possible de déduire une unité correcte d'une grandeur physique, à partir de ca dimension.

Pour créer un système d'unités, comme le système international d'unité (SI), il est nécessaire, tout d'abord, d'établir un système de grandeurs et une série d'équations définissant les relations entre ces grandeurs. Cela est indispensable parce que les équations reliant les grandeurs entre elles déterminent celles reliant les unités entre elles.

En 1960, la 11$^{\text{éme}}$ Conférence générale des poids et mesures a mis en place le système d'unités international (SI), appelé aussi MKSA (Mètre - Kilogramme, seconde, Ampère).La conférence fixa aussi des règles pour les préfixes, les unités dérivées et autres. Le SI se base sur sept unités fondamentales bien définies, considérées du point de vue dimensionnel.

Unités fondamentales du système (SI).

Grandeur	Nom	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	Kilogramme	Kg
Temps	Seconde	s
Intensité du courant électrique	Ampère	A
Température	Kelvin	K
Quantité de matière	Mole	mol
Intensité lumineuse	Candela	Cd

I-3-c Le système C.G.S

En plus du système MKSA,il existe un autre système d'unités, dit CGS. Ce dernier a été créé par la « British association » en 1873. Ce système utilise comme unités fondamentales: le centimètre pour la longueur, le gramme pour la masse et la seconde pour le temps.Les unités de longueur et de masse du système CGS sont des sous multiples décimaux des unités correspondant au système MKSA. Les formules définissant les unités dérivées sont les mêmes pour les deux systèmes.

I-3-d Unités dérivées

Les unités dérivées sont formées à partir des unités de base (fondamentales) et ceci grâce aux relationsmathématiques qui les relient.

Exemple:

La densité de courant en(A/m^2), le volume en(m^3) et la masse volumique en (Kg/m^3). Certaines unités ont reçu des nomset des symboles particuliers. Quelques exemples,dans les deux systèmes d'unités, sont fournis dans les tableaux(4) et (5).

Unités dérivées de quelques grandeurs physiques,dans le système MKSA.

Grandeur dérivée	Nom de l'unité	Symbol	Unité dans le système MKSA
Force	Newton	N	$M.Kg.s^{-2}$
Pression	Pascal	Pa	$m^{-1}.Kg.s^{-2}$
Energie	Joule	J	$m^{2}.Kg.s^{-2}$
Puissance	Watt	W	$M^{2}.Kg.s^{-3}$
Fréquence	Hertz	Hz	s^{-1}
Charge électrique	Coulomb	C	s.A
Différence de potentiel	Volt	V	$m^{2}.Kg.s^{-3}.A^{-1}$
Résistance	Ohm	Ω	$m^{2}.Kg.s^{-3}.A^{-2}$
Induction magnétique	Tesla	T	$Kg.s^{-2}.A^{-1}$
Flux d'inductance magnétique	Weber	Wb	$m^{2}.Kg.s^{-2}.A^{-1}$

Unités dérivées de quelques grandeurs physiques,dans le système CGS.

Grandeur	Nom de l'unité	Symbol	Equivalent dans le système CGS
force	dyne	dyn	$1dyn=10^{-5}N$
Pression	Baryes	Bary	$1Bary=10^{-1}$ Pa
Energie	erg	erg	$1erg=10^{-7}J$
accélération	gal	Gal	$1Gal=10^{-2}m.s^{-2}$
Champ magnétique	Oersted	Oe	$1Oe = 10^{3}/4\pi\ A.m^{-1}$
Induction magnétique	Gauss	G	$1G=10^{-4}T$
Viscosité dynamique	poise	P	1P=0.1Pa.s
Viscosité cinématique	stokes	St	$1\ St=10^{-4}m^{2}.s^{-1}$

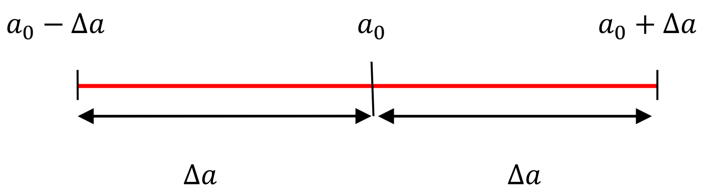
I-4 Les incertitudes

I-4-a Notion d'erreur ou incertitude

L'Erreurou l'incertitude est l'écart entre la valeur exacte et la valeur obtenue par la mesure. La valeur exacte de la grandeur physique est souvent inaccessible. Pour se rapprocher de cette valeur, il faut bien estimer cette erreur.Nous distinguons deux types d'erreur:

I-4-b L'incertitude absolue

L'incertitude absolue est l'estimation de l'erreur que fait l'expérimentateur. Il s'agit de l'écart possible entre la valeur obtenue par la mesure et la valeur exacte. La mesure et son incertitude constituent un domaine de valeurs possibles à l'intérieur duquel se trouve la valeur exacte. Soit une grandeur physique a, dont la valeur exacte est a_0. L'écriture:
$a = a_0 \pm \Delta a$veut dire que la valeur de a est comprise dans l'intervalle: $[a_0 - \Delta a , a_0 + \Delta a]$.



L'incertitude absolue est un nombre réel positif, elle s'exprime dans les unités de la grandeur mesurée. Parfois, l'erreur absolue est attribuée à la précision de l'instrument utilisé pendant la mesure.

Exemple:

Les mesures desdimensions d'une salle donnent les valeurs suivantes:
Longueur: L = (10.2 ± 0.1) m. Largeur: l = (7.70 ± 0.08) m. Hauteur : H = (3.17±0.04) m
Calculez et donnez les résultats avec leurs incertitudes absolues:

a- La surface S du sol
b- Le volume V de la salle.

Solution:

a- S=L.l= 78.54 m². puisque $\frac{\Delta S}{S}=\frac{\Delta L}{L}+\frac{\Delta l}{l}\Rightarrow\Delta S=S.\left(\frac{\Delta L}{L}+\frac{\Delta l}{l}\right)$, ΔS = 1.59 m².

S= (78.54 ± 1.59) m².

b- V=L.l.h= 248.97 m³. Puisque$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta L}{L}+\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta h}{h}\Rightarrow\Delta V=V.\left(\frac{\Delta L}{L}+\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta h}{h}\right)$, ΔV=8.17 m³.

V= (248.97 ± 8.17) m³

I-4-c L'incertitude relative

Pour une grandeur physique a, la qualité ou la précision de la mesure est donnée par l'incertitude relative,qui est définie comme le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur mesurée,Δa/a. Ce rapport habituellement s'exprime en pourcentage.

Exemple :

Une incertitude de 1 mm sur une mesure de 5 cm correspond à une précision relative de Δx/x = 10^{-3} m / 5.10^{-2} = 0.02 (2%).

Cette même incertitude sur une mesure de 5 m correspondrait à une précision, excellente, de 10^{-3} m / s = 0.0002 (0,02%).

I-4-d Opérations sur les incertitudes

Les incertitudes obéissent aussi à certaines opérations mathématiques de base.

Cas d'une somme ou d'une différence: Si une grandeur physique C est la résultante de deux grandeurs B et C.

Si C = A + B, alors ΔC=ΔA+ΔB

Si C = A - B, alors ΔC=ΔA+ΔB

L'incertitude relative sur C est :ΔC/C

Cas d'un produit ou d'un rapport: Si une grandeur physique G est la résultante d'un produit ou d'un rapport de grandeurs, par exemple A, B et C:

$G = A.B.C$: $(\Delta G/G) = (\Delta A/A) + (\Delta B/B) + (\Delta C/C)$

$G = A.B / C$: $(\Delta G/G) = (\Delta A/A) + (\Delta B/B) + (\Delta C/C)$

Le résultat précédent peut être obtenu en utilisant la fonction logarithme. Soit le cas un peu plus général de la grandeur G, qui s'écrit : $G=(K.A^{\alpha}.B^{\beta})/C^{\gamma}$

A,B et C sont des grandeurs physiques que l'on mesure et K une constante, le calcul de l'incertitude,dans ce cas, l'incertitude relative sur le résultat s'obtient selon les étapes suivantes :

1- Appliquons la fonction logarithme aux deux membres l'expression de G:

$\text{Log } G= \log [(K.A^{\alpha}.B^{\beta})/C^{\gamma}] \quad \Rightarrow \quad \text{Log } G = \text{Log } K +\alpha \text{ Log } A +\beta \text{ Log } B- \gamma \text{ Log } C$

2- La différentielle de l'expression obtenue est: $dG/G=\alpha\,(dA/A)+\beta\,(dB/B)-\gamma\,(dC/C)$

3- Les éléments différentiels (dG, dA, dB, dC) sont des quantités infinitésimales ou de très faibles écarts (variations) dans les grandeurs G, A, B et C. Si ces écarts deviennent importants, ces éléments deviennent des incertitudes (ΔG, ΔA, ΔB, ΔC). Ce qui donne:

$$\Delta G/G = \alpha\,(\Delta A/A)+\beta\,(\Delta B/B) +\gamma\,(\Delta C/C)$$

Notons que dans l'équation ci-dessus, le signe (-) a été remplacé par le signe (+). Ce qui s'explique par le fait que les erreurs s'accumulent ou s'ajoutent. Enfin, nous aurons :

$$G_{corrigée} = G_{mesurée} \pm \Delta G.$$

I-5 Exercices

Exercice 1

1- Trouver la dimension et l'unité de la constante de gravitation G, dans le système SI. Cette dernière étant liée à la force F par: $F = (G.m_1.m_2) / r^2$. m_1 et m_2 sont les deux masses en interaction et r est la distance qui les sépare.

2- Déterminer la dimension et l'unité de la permittivité ε_0 et de la perméabilité μ_0, du vide, dans le système SI. Ces deux grandeurs apparaissent dans les deux équations suivantes: $F = \mu_0 \frac{I_1.I_2}{2\pi r}$, $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$. F étant la force et q est la charge électrique élémentaire de l'électron. L et r sont des distances et I des intensités de courants.

3- Vérifier l'homogénéité de la relation $\mu_0.\varepsilon_0 = 1$. c étant la célérité (vitesse) de la lumière dans le vide.

Exercice 2

La résistance exercée par l'air sur une sphère, qui se déplace à la vitesse V est donnée par la formule: $R = K.s.V^2$. s étant la surface de grand-cercle.

1- Quelle est la dimension de K.

2- Déterminer la valeur de K dans le système CGS connaissant sa valeur numérique dans le système SI, K = 0.28 SI.

Exercice 3

Pour calculer l'accélération terrestre g avec un pendule, on mesure la longueur du pendule l ainsi que la période d'oscillation T et on utilise la loi suivante : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

avec l = (1.552±0.002) (m) et T= (2.50 ± 0.02) s.

Calculer g avec son incertitude relative ainsi que son incertitude absolue.

Exercice 4

La constante de torsion C d'un fil métallique de section circulaire, dont l'unité est le $kg.m^2/s^2$, dans le système SI, s'exprime comme suit : $C = y^a.d^b/l$

Où Y est le module de torsion (ou coefficient de Coulomb) caractérisant la nature du fil. L sa longueur et d son diamètre. Sachant que Y est équivalent à une pression.

1- Calculer les exposants a et b, puis donner l'expression finale de C.

2- Calculer littéralement la précision sur C.

Solution

Exercice 1

1- $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow G = \frac{F.r^2}{m_1.m_2} \Rightarrow [G] = \frac{[F.r^2]}{[m_1.m_2]} = \frac{[F].[r^2]}{[m_1].[m_2]} = \frac{[F].[r]^2}{[m_1].[m_2]}$

F: est une force $[F] = MLT^{-2}$.R une distance: $[R] = L$.m_1 et m_2 sont des masses: $[m_1] = [m_2] = M$

$[G] = \frac{MLT^{-2}.L^2}{M^2}$donc $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$. L'unité de G est $Kg^{-1}m^3s^{-2}$

$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi F}\frac{q_1q_2}{r^2} \Rightarrow [\varepsilon_0] = \frac{[q_1q_2]}{[4\pi F.r^2]} = \frac{[q_1][q_2]}{[4\pi][F].[r^2]}$

q_1 et q_2 sont des charges électriques: $[q_1] = [q_2] = I.T$. 4π est une constante $[4\pi] = 1$

Donc $[\varepsilon_0] = \frac{T^2.I^2}{MLT^{-2}.L^2} = M^{-1}L^{-3}T^4I^2$. L'unité de ε_0 est $kg^{-1}m^{-3}s^4m^2$.

$F = \mu_0\frac{LI_1.I_2}{2\pi r} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{I_1.I_2}\frac{2\pi Fr}{l} \Rightarrow [\mu_0] = \frac{[2\pi F]}{[I_1.I_2.L]} = \frac{[2\pi][F].[r]}{[I_1][I_2].[l]}$

I_1 et I_2 sont des intensités de courants: $[I_1] = [I_2] = I$, donc $[\mu_0] = \frac{MLT^{-2}.L}{I^2.L} = MLT^{-2}I^{-2}$.

L'unité de μ_0 est $kgms^{-2}A^{-2}$.

2- $[\varepsilon_o\mu_o c^2] = [\varepsilon_o][\mu_o][c^2] = M^{-1}L^{-3}T^4I^2.\ MLT^{-2}I^{-2}.\ L^2T^{-2}$ donc $[\varepsilon_o\mu_o c^2] = 1$

Exercice 2

1- $R = K.s.V^2 \Rightarrow K = \frac{R}{sV^2}$ la dimension de la résistance est: $[R] = L^2MT^{-3}I^{-2}$. La dimension de la vitesse V est $[V] = LT^{-1}$.$[K] = \left[\frac{R}{sV^2}\right] = \frac{[R]}{[s][V]^2} = \frac{L^2 \cdot M \cdot T^{-3} \cdot I^{-2}}{L^2.L^2T^{-2}} = M.L^{-2}T^{-1}I^{-2}$

2- Dans le système SI, $K = 0.28\ Kgm^{-2}s^{-1}A^{-2} = 0.28\ .10^3.10^{-4}gcm^{-2}s^{-1}A^{-2} = 0,028\ gcm^{-2}s^{-1}A^{-2}$.

Exercice 3

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = (4.\pi^2.l) / T^2 = (4.\pi^2.1.552)/(2,5)^2 = 9,8\ m/s^2$.

$\Delta g/g = (\Delta l/l) + 2(\Delta T/T) = 1,7\ \%$, $\Delta g = (\Delta g/g)g = 0,017 \times 9,8 = 0,17$ donc $g = (9,8 \pm 0,17)\ (m/s^2)$.

Exercice 4

1- D'après l'unité de C, $[C] = ML^2T^{-2}$

La grandeur Y est homogène à une pression $[Y] = ML^{-1}T^{-2}$. d et l sont des longueurs $[d] = [l] = L$.

Equation aux dimensions $[C] = [Y]^a \frac{[d]^b}{[l]} \Rightarrow ML^2T^{-2} = (ML^{-1}T^{-2})^a \frac{L^b}{L}$. $ML^2T^{-2} = M^aL^{-a}T^{-2a}L^{b-1}$.

$ML^2T^{-2} = M^aL^{-a+b-1}T^{-2a}$

Par identification, on aura : $\begin{cases} a = 1 \\ -a + b + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

2- $\text{LnC} = \ln\left(Y\frac{d^2}{l}\right) = \ln Y + \ln d^2 - \ln l = \ln Y + \ln d - \ln l - \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l}$