

جامعة وهران 2

محمد بن احمد  
Université d'Oran 2  
Mohamed Ben Ahmed



*Université d'Oran 2*

*Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle  
Département de Maintenance en Instrumentation*

*Master 1 : Génie Industriel*

# Mathématique pour l'Automatique

**Chargée de module:**

**Mme BENMANSOUR .S**

**2019/2020**

# *Contenu du cours*

- I. Modélisation des systèmes continus LTI**
- II. Réponses temporelles des systèmes continus LTI**
- III. Stabilité des systèmes continus LTI**
- IV. Performances des systèmes continus LTI**
- V. Commande analogique des systèmes continus LTI**

جامعة وهران 2

محمد بن احمد  
Université d'Oran 2  
Mohamed Ben Ahmed



*Université d'Oran 2*

*Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle  
Département de Maintenance en Instrumentation*

*Master 1: Génie Industriel*

# Mathématique pour l'Automatique

**Cours I**

**Modélisation des systèmes continus LTI**

Chargée de module:

Mme BENMANSOUR . S

2018/2019

# *Contenu du cours I*

- 1. Caractéristique d'un système*
- 2. Les signaux d'entrée particuliers*
- 3. Fonction de transfert*
- 4. Analyse d'un système asservis*

# *Contenu du cours I*

- 1. Caractéristique d'un système***
- 2. Les signaux d'entrée particuliers*
- 3. Fonction de transfert*
- 4. Analyse d'un système asservis*

# Caractéristique d'un système

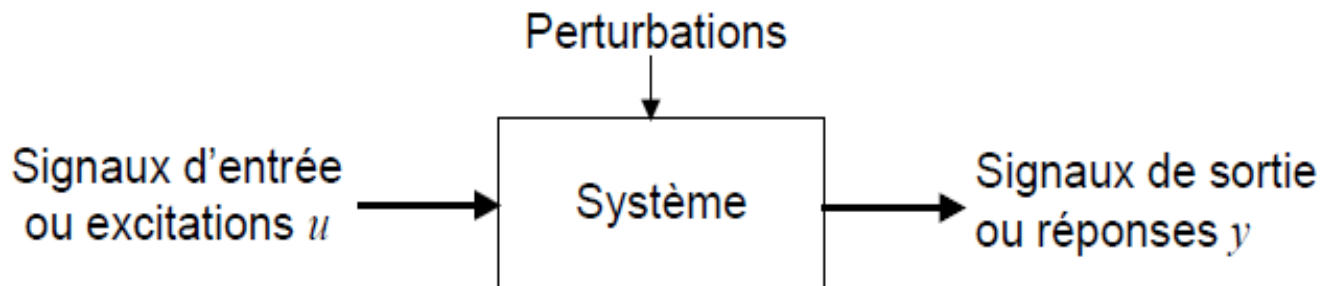
## 1. Qu'est-ce qu'un système?

**Système** : ensemble d'objets interagissant entre eux pour réaliser une fonction. Il est connecté au monde extérieur à travers :

➤ *ses entrées*

- Signaux d'excitation : actions envoyées au système
- Perturbations qui sont en général imprévisibles

➤ *ses sorties* : réponses du système aux signaux d'entrée



# *Caractéristique d'un système*

## *2. Modélisation d'un système*

- L'étude ou la modélisation d'un système nécessite la connaissance :
  - de *la nature des signaux d'entrée et de sortie* (déterministes, aléatoires, à temps continu, à temps discret...)
  - des *caractéristiques du système*: la nature, l'invariance, la linéarité... pour concevoir un modèle « utile »
  
- Un modèle « utile » obtenu = au moins 75% du travail!
  
- La construction d'un modèle se fait par deux moyens:
  - A partir de la connaissance a priori du système ( Lois de la Physique) -> *Modèle de connaissance*
  - A partir d'expériences réalisées sur le système (Identification) -> *Modèle de représentation*

# *Caractéristique d'un système*

## *3. Que fait-on avec un modèle?*

### ➤ Analyse

- Etude du système en BO (boucle ouverte )
- Elaboration des propriétés du système (stabilité, précision, rapidité,...)

### ➤ Synthèse

- Créer des lois de commande suivant un cahier des charges (CC) en termes de stabilité, de précision, de régulation, de poursuite, ....
- Etudier le système asservis en boucle fermée.
- Elaborer les propriétés du système (stabilité, précision, rapidité,...)

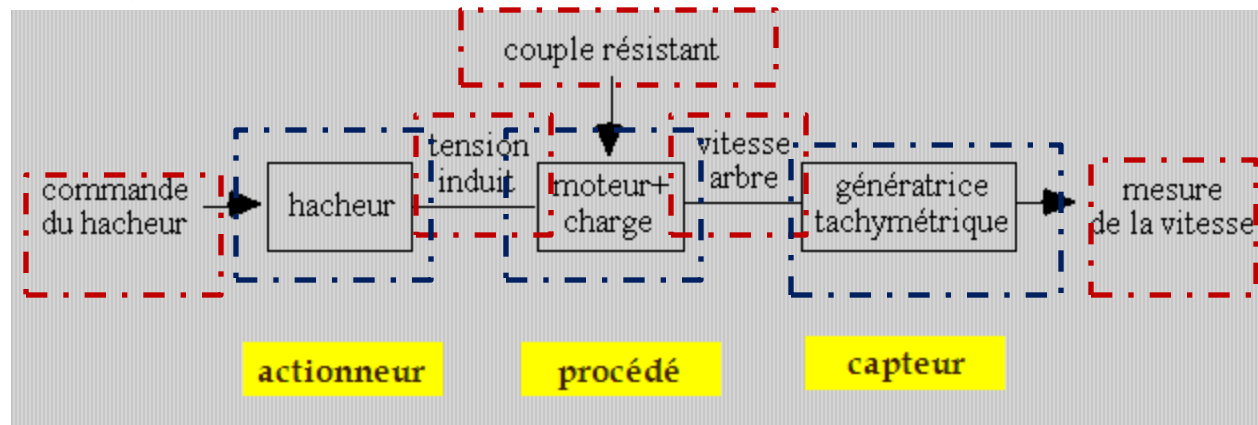


# Schémas fonctionnels

## 1. Constitution du schéma fonctionnel (schéma bloc)

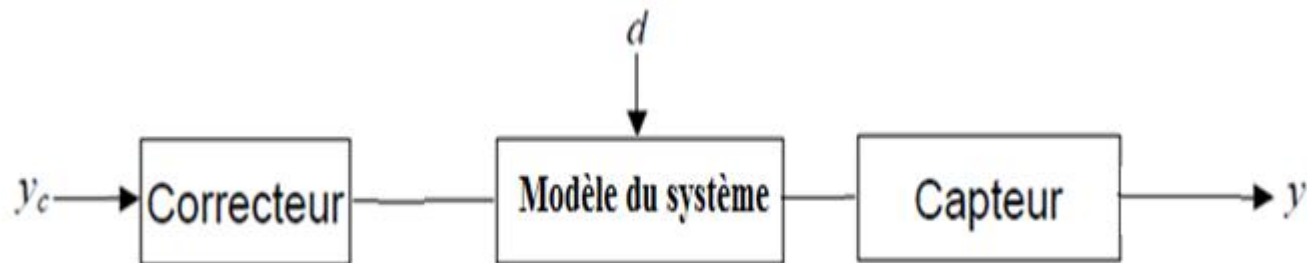
Le schéma fonctionnel permet de représenter un système en tenant compte des différentes variables et éléments qui le caractérise :

- les variables sont représentées par des flèches
- les éléments sont représentés par des rectangles (bloc fonctionnel) ; chaque bloc fonctionnel est une fonction de transfert (FT) entre une variable d'entrée et une variable de sortie.



# *Schémas fonctionnels*

## 2. Schéma bloc en boucle ouverte (BO)

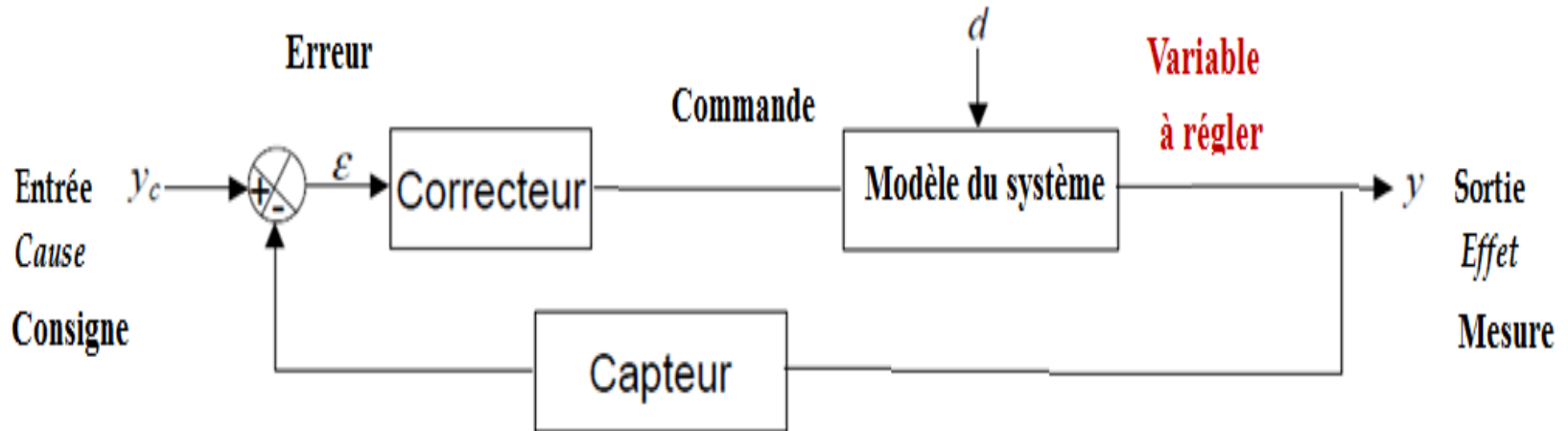


### Remarque

- Il n'y a pas de moyen exact pour que la sortie  $y(t)$  suit l'entrée (difficulté d'obtenir une mesure souhaitée)
- Ne prend pas en compte les perturbations.

# *Schémas fonctionnels*

## 3. Schéma bloc en boucle fermée (BF), contre réaction



### Remarque:

Il existe une boucle de retour pour asservir le système à la juste valeur de la consigne  $y_c(t)$ .

### Exemple:

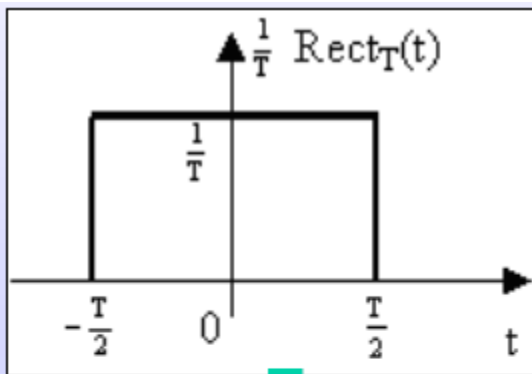
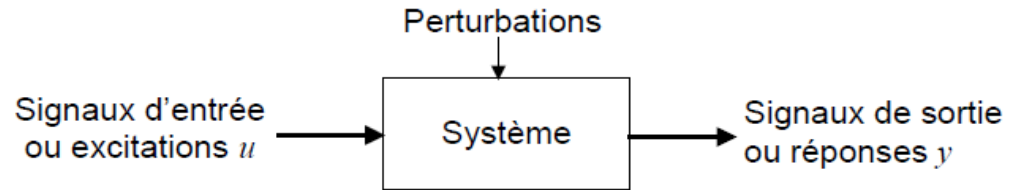
Contrôle de vitesse

# ***Contenu du cours I***

- 1. Caractéristique d'un système*
- 2. Les signaux d'entrée particuliers**
- 3. Schémas fonctionnels*
- 4. Fonction de transfert*

# Les signaux d'entrée particuliers

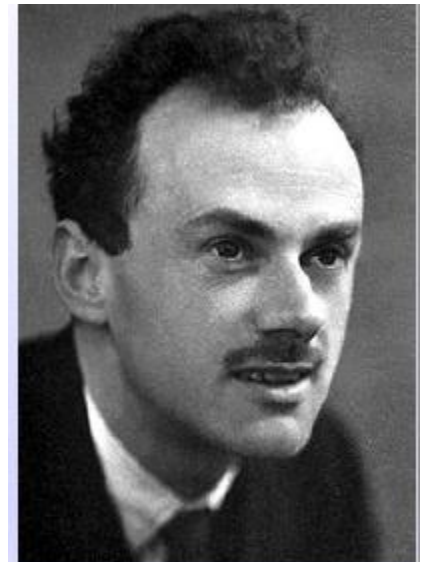
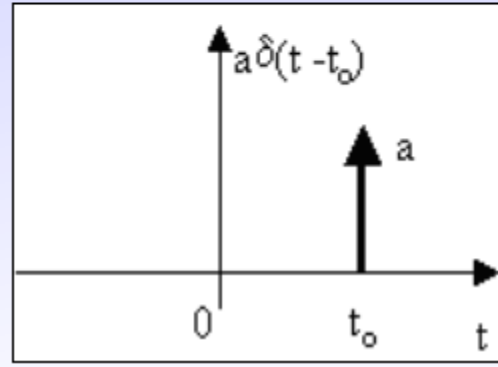
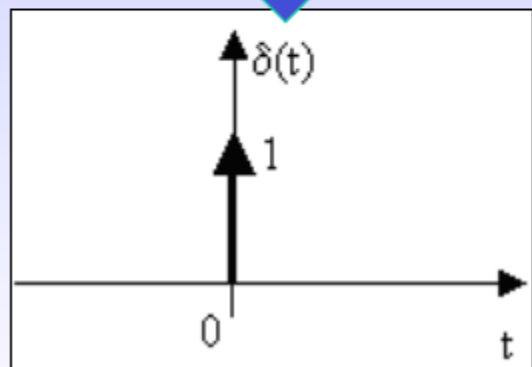
## 1. Impulsion de Dirac



$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{Rect}_T(t) = \delta(t)$$

et donc

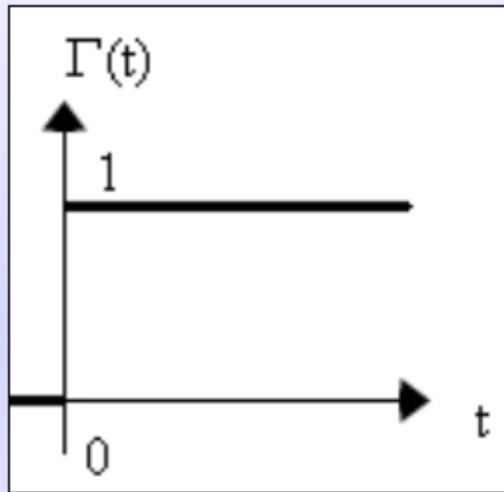
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



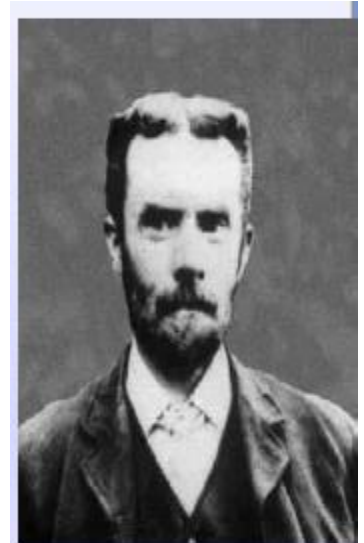
Paul Dirac (1902 - 1984, Nobel de Physique, 1933)

# Les signaux d'entrée particuliers

## 2. Echelon unité (ou de Heaviside)



$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$$



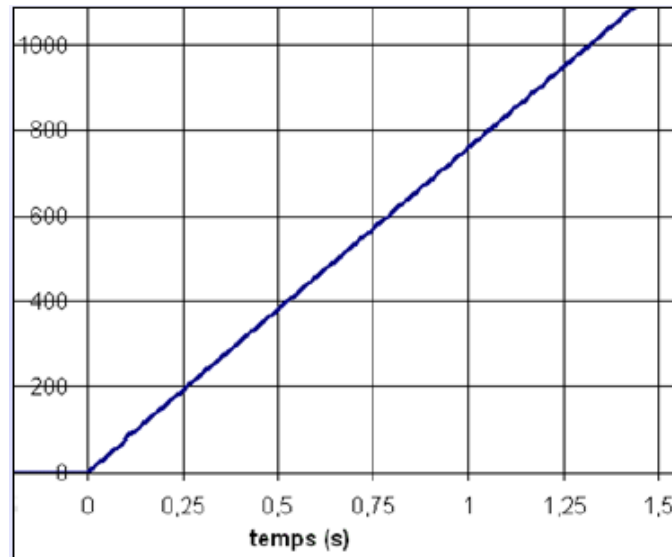
Oliver Heaviside  
(1850 -1925)

### Remarque

La valeur à l'origine ( $t = 0$ ) peut être choisie égale à 1 mais ce choix est arbitraire.

## *Les signaux d'entrée particuliers*

### 3. Echelon de vitesse (Rampe)



#### Remarque

La dérivée du signal Echelon de vitesse (ou rampe) correspond à l'Echelon.

# *Contenu du cours I*

- 1. Caractéristique d'un système*
- 2. Les signaux d'entrée particuliers*
- 3. Fonction de transfert**
- 4. Analyse d'un système asservis*

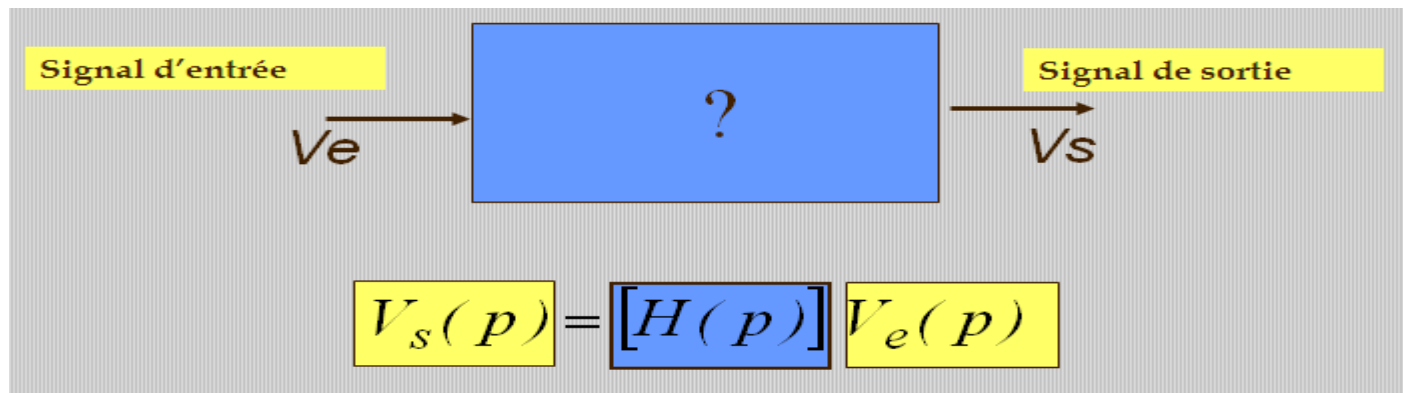


# Fonction de transfert

## 1. Présentation de la FT

2 types de variables (flèches) externes :

- Signal d'entrée
- Signal de sortie dont l'évolution dépend de l'entrée



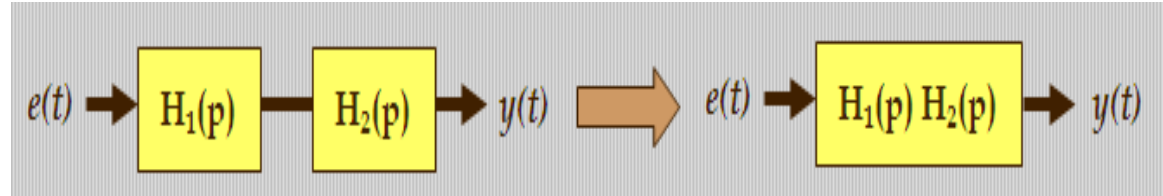
$$V_s(p) = [H(p)] V_e(p)$$

- La fonction de transfert  $H(p)$  caractérise le système.

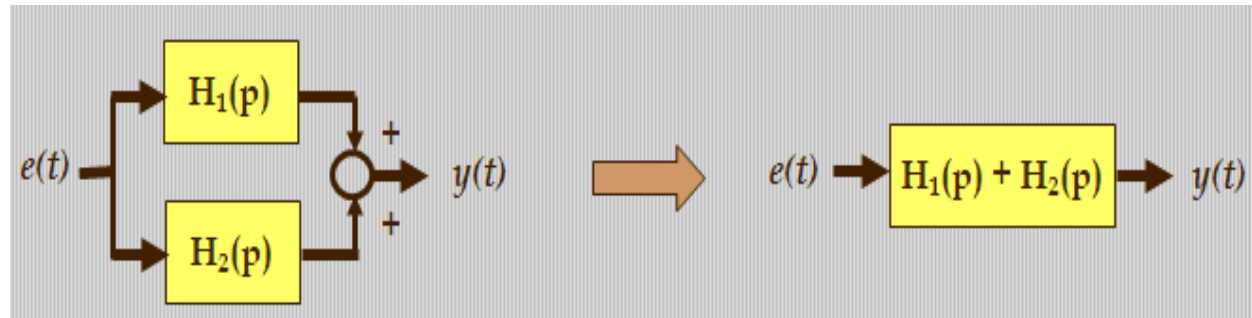
# *Fonction de transfert*

## 2. Association des fonctions de transfert

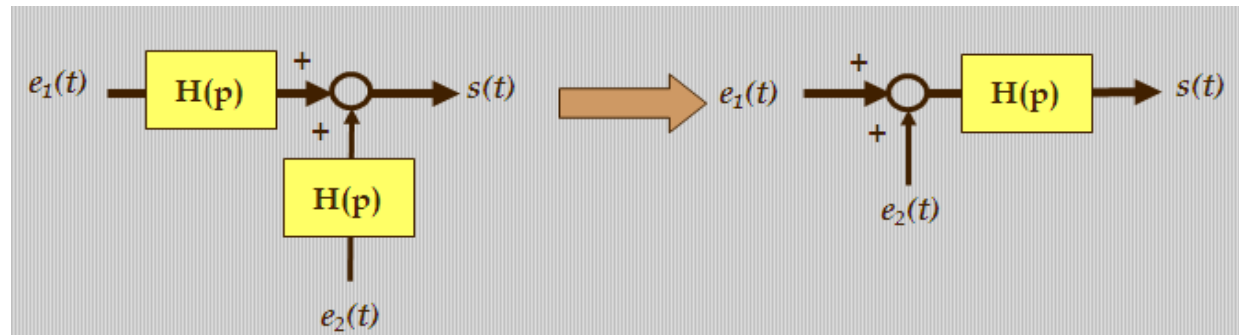
### ➤ Série



### ➤ Parallele



### ➤ Factorisation

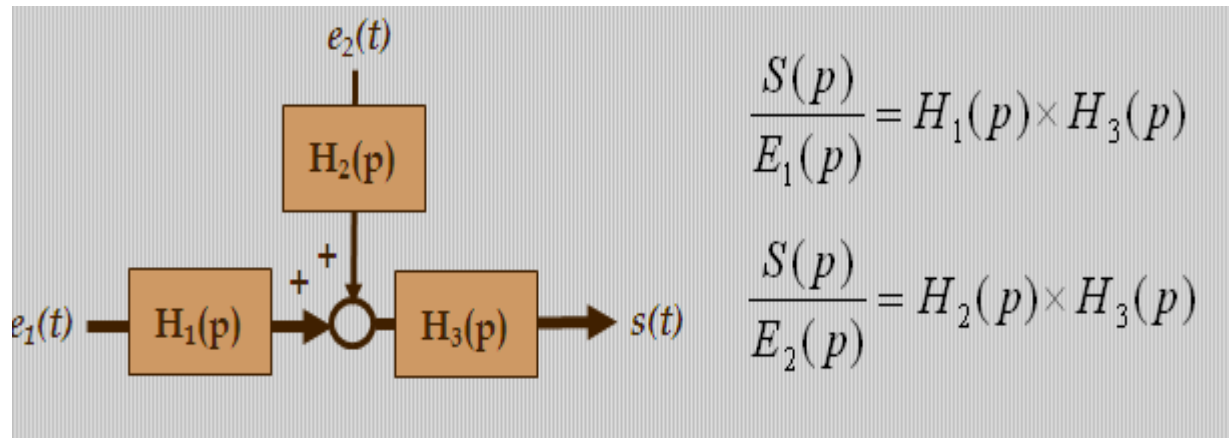


# Fonction de transfert

## 2. Association des fonctions de transfert

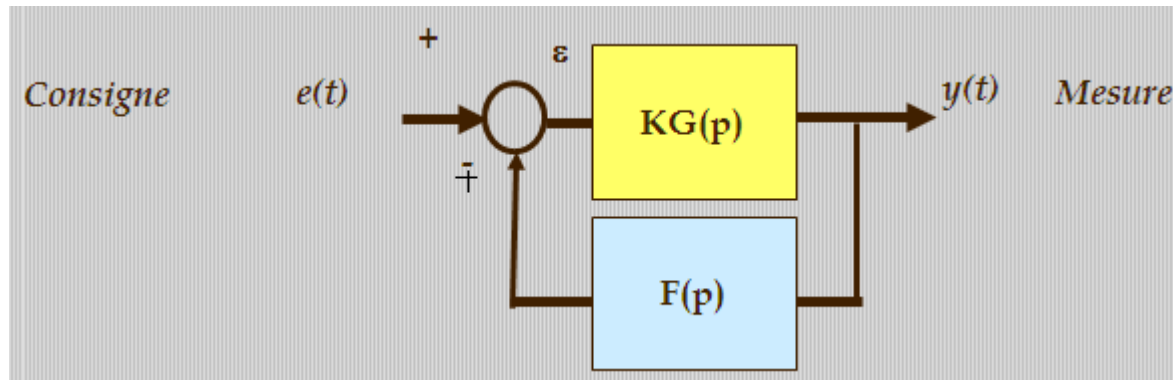
### ➤ Principe de superposition

Quand un système a plusieurs entrées (commande et perturbations) pour calculer la FT entre une entrée particulière et la sortie, on suppose que les autres entrées sont nulles



# Fonction de transfert

## 3. Boucle de contre réaction (boucle fermée)

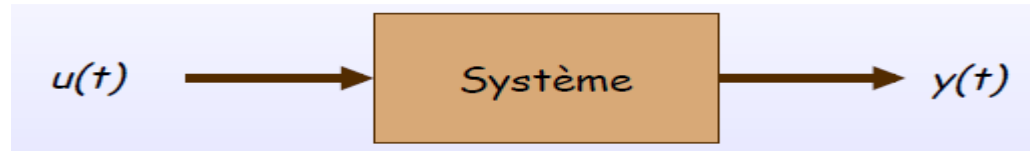


La fonction de transfert s'écrit:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{K G(p)}{1 \pm K G(p) F(p)}$$

# Fonction de transfert

## 4. Représentation des systèmes dynamique



Le comportement dynamique du système est régi par une équation différentielle:

$$b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t) = a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t)$$

Dans les cas réels,  $m \leq n$  : système causal: la cause  $u(t)$  précède l'effet  $y(t)$ .

L'objectif est de déterminer  $y(t)$  connaissant  $u(t)$  à partir de l'équation généralisée:

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)}(t)$$

# *Fonction de transfert*

## **4. Représentation des systèmes dynamique**

Etude temporelle des système dynamique : résolution d'équations différentielles  $\Rightarrow$  *complexe*.

### *Solution*

Remplacer **les équations différentielles** par **des équations polynomiales** dans un domaine symbolique à l'aide de *la transformée de Laplace* :  $\Rightarrow$  *plus simple*.

$\Rightarrow$  Cela revient à déterminer des racines du polynômes dans une table de transformation donnée

# *Fonction de transfert*

## **5. Transformé de Laplace TL**

### ➤ Définition de la Transformée de Laplace directe (TL)

- ◆  $x(t)$  : signal réel tel que  $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$
- ◆ Transformée de Laplace de  $x(t)$  :  $X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$
- ◆  $X(s)$  : fonction de la variable complexe  $s = \sigma + j\omega$ ,  $\sigma \geq 0$

**Exemple** Soit le signal  $x(t) = e^{-at}$  pour  $t \geq 0$  et  $a > 0$

$$X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t} dt$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a}$$

### ➤ Définition de la Transformée de Laplace inverse

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{ts} ds$$

# Fonction de transfert

## 5. Transformé de Laplace TL

### ➤ Propriétés de la Transformée de Laplace

$x(t)$  et  $y(t)$  : signaux réels tels que  $x(t) = 0, y(t) = 0 \quad \forall t < 0$

#### - Linéarité

$$\mathcal{L}(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha X(s) + \beta Y(s) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$$

#### - Dérivation

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = sX(s) - x(0^+) \quad x(0^+) : \text{condition initiale}$$

$$\mathcal{L}(x^{(k)}(t)) = s^k X(s) - s^{k-1}x(0^+) - s^{k-2}x^{(1)}(0^+) - \dots - x^{(k-1)}(0^+)$$

$x(0^+), x^{(1)}(0^+), \dots, x^{(k-1)}(0^+)$  : conditions initiales

**Cas particulier : conditions initiales nulles**  $\mathcal{L}(x^{(k)}(t)) = s^k X(s)$



# *Fonction de transfert*

## **5. Transformé de Laplace TL**

### ➤ Propriétés de la Transformée de Laplace

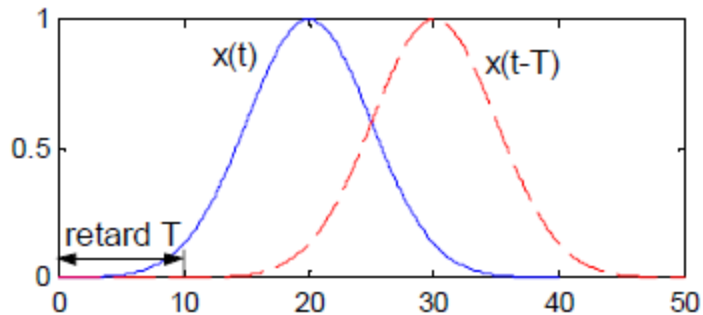
#### - Intégration

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \Rightarrow \mathcal{L}(y(t)) = \frac{X(s)}{s} + \frac{y(0^+)}{s}$$

**Conditions initiales nulles:**  $\mathcal{L}(y(t)) = \frac{X(s)}{s}$

#### - Retard temporel

$$\mathcal{L}(x(t-T)) = e^{-sT} X(s)$$



# *Fonction de transfert*

## **5. Transformé de Laplace TL**

### ➤ Propriétés de la Transformée de Laplace

#### - Théoreme de la valeurs initiale

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s)$$

#### - Théoreme de la valeurs finale

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

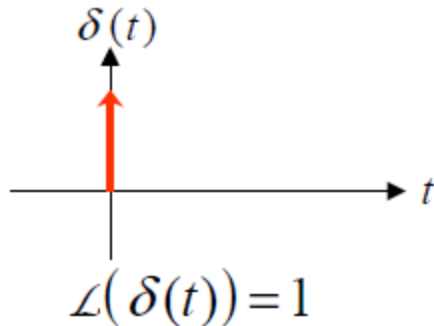
#### - Produit de convolution

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$
$$\Rightarrow Z(s) = X(s) Y(s)$$

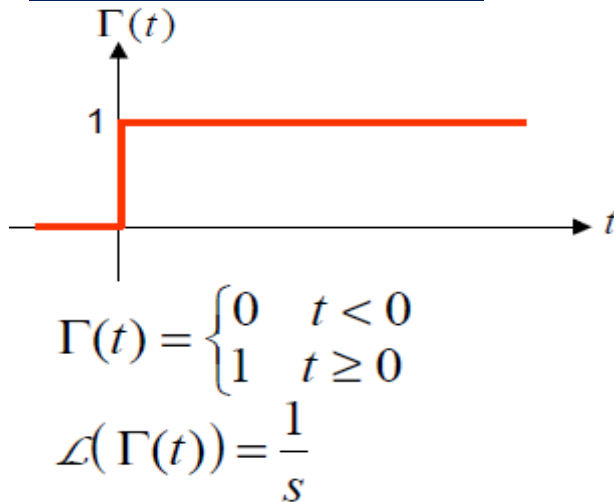
# Fonction de transfert

## 6. Transformé de Laplace TL des fonctions usuels

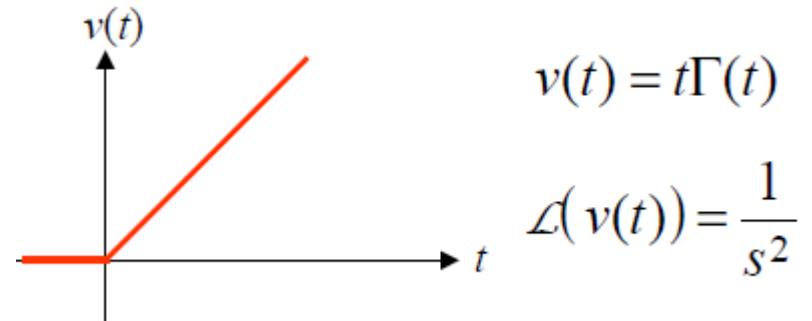
### ➤ Impulsion de Dirac $\delta(t)$



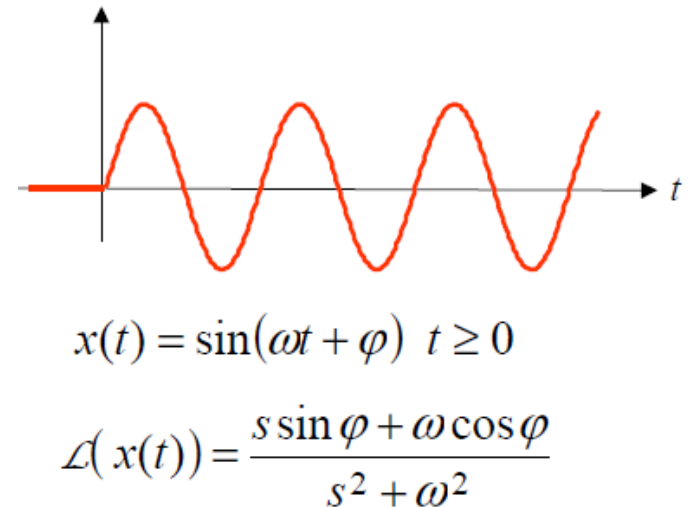
### ➤ Echelon unité $\Gamma(t)$



### ➤ Rampe ou échelon de vitesse



### ➤ Signal sinusoïdal



## Fonction de transfert

### 7. Fonction de transfert d'un système continu LTI

En utilisant la TL de l'équation différentielle, on obtient :

$$a_n s^n Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

La fonction de transfert a la forme d'une fraction rationnelle :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \mathbf{N(s) \text{ et } D(s) : \text{ polynômes en } s \text{ de degrés respectifs } n \text{ et } m}$$

Le système est dit d'ordre  $n$

# Fonction de transfert

## 8. Eléments caractéristiques de la FT

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

### ➤ Pôles (modes) et zéros du système

- Les pôles sont les racines  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  du polynôme  $D(s)$ . Les pôles sont soit réels, soit des paires de pôles complexes conjugués
- Un système d'ordre  $n$  admet  $n$  pôles distincts ou moins
- Les zéros sont les racines  $z_i \in \mathbb{C}$  du polynôme  $N(s)$

### ➤ Gain du système

$$H(s) = \frac{K \frac{b_m}{b_0} s^m + \dots + \frac{b_1}{b_0} s + 1}{s^\alpha \frac{a_n}{a_0} s^n + \dots + \frac{a_1}{a_0} s + 1}$$

$$K = \frac{b_0}{a_0} : \text{gain du système}$$

$$H(s) = \frac{K}{s^\alpha} H'(s) \quad \alpha \geq 0$$

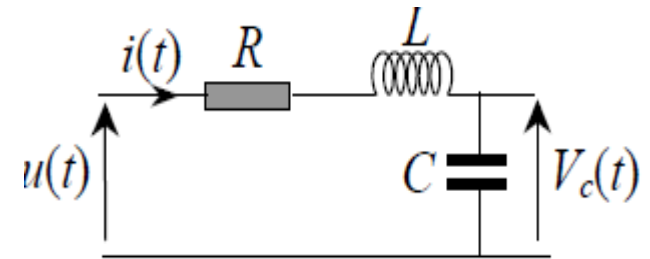
$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^\alpha H'(s)$$

# Fonction de transfert

## 9. Exemple de FT d'un système continu LTI

### Exemple : circuit RLC

Sortie du système :  $y(t) = V_c(t)$



#### ▪ Lois de l'électricité

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_c(t) = u(t)$$

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \Rightarrow i(t) = C \dot{V}_c(t)$$

On en déduit :  $LC \ddot{V}_c(t) + RC \dot{V}_c(t) + V_c(t) = u(t)$

#### ▪ Fonction de transfert

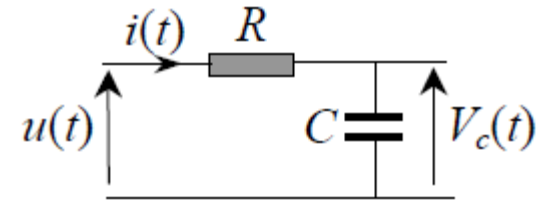
$$(LC s^2 + RC s + 1)V_c(s) = U(s)$$

$$H(s) = \frac{V_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{LC s^2 + RC s + 1}$$

# Fonction de transfert

## 10. Réponse d'un système continu LTI par la TL

### Exemple: circuit RC



Sortie du système :  $y(t) = V_c(t)$

▪ Equation différentielle  $RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

Donner l'expression de la réponse du système pour une entrée échelon d'amplitude  $u_0=2V$ . La tension initiale aux bords de la capacité est  $V_c(0)=0.5V$

▪ Application de la TL

$$RC(sY(s) - V_c(0)) + Y(s) = U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{U(s)}{RCs + 1} + \frac{RC}{RCs + 1} V_c(0)$$

$$u(t) = u_0\Gamma(t) \Rightarrow U(s) = \frac{u_0}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{u_0}{s(RCs + 1)} + \frac{RC}{RCs + 1} V_c(0)$$

# Fonction de transfert

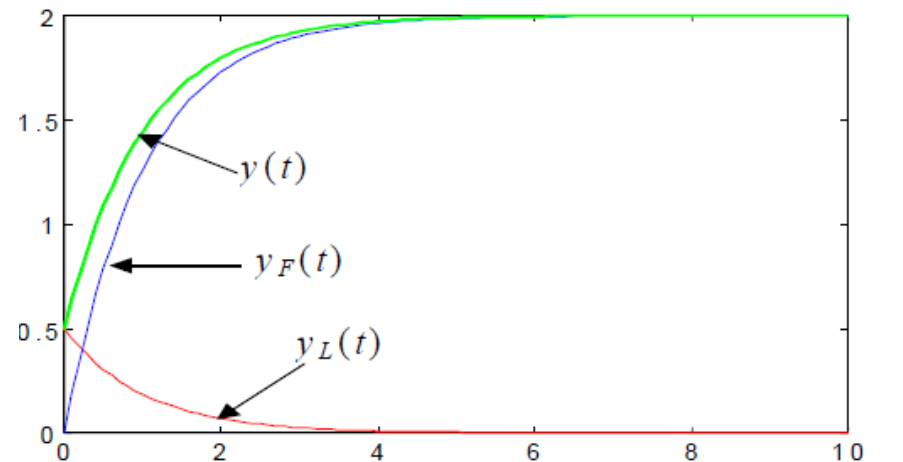
## 10. Réponse d'un système continu LTI par la TL

### Exemple : circuit RC

$$Y(s) = \frac{u_0}{s(RCs + 1)} + \frac{RC}{RCs + 1} V_c(0)$$

En utilisant les tables de transformée de Laplace, on obtient :

$$y(t) = \underbrace{u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}_{y_F(t)} + \underbrace{V_c(0) e^{-\frac{t}{RC}}}_{y_L(t)}$$

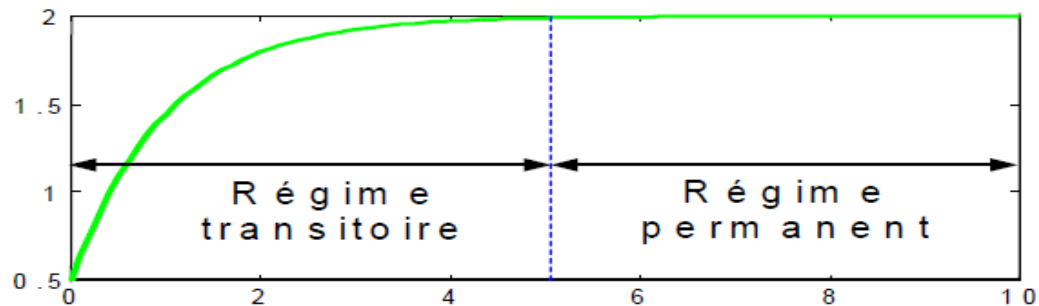




# *Fonction de transfert*

## 11. Régimes transitoire et permanent

Réponse du circuit RC



### ➤ Régime permanent

Soumis à un entrée échelon, rampe, ... un système linéaire stable aura un comportement asymptotique similaire à l'entrée : on dit qu'il a atteint le régime permanent.

### ➤ Régime transitoire

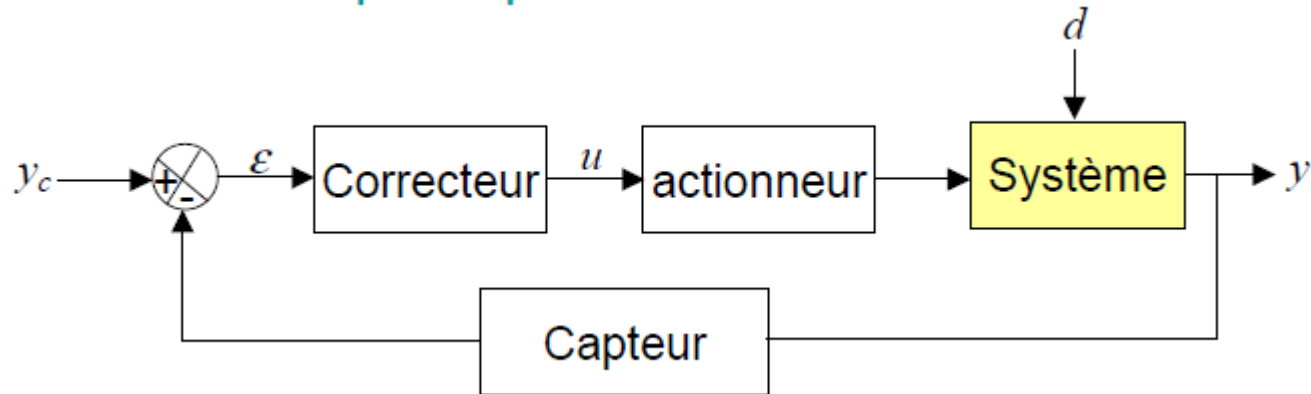
C'est la partie de la réponse qui précède le régime permanent. Le régime transitoire est lié à la dynamique du système

# ***Contenu du cours I***

- 1. Caractéristique d'un système*
- 2. Les signaux d'entrée particuliers*
- 3. Fonction de transfert*
- 4. Analyse d'un système asservis**

# Analyse d'un système asservis

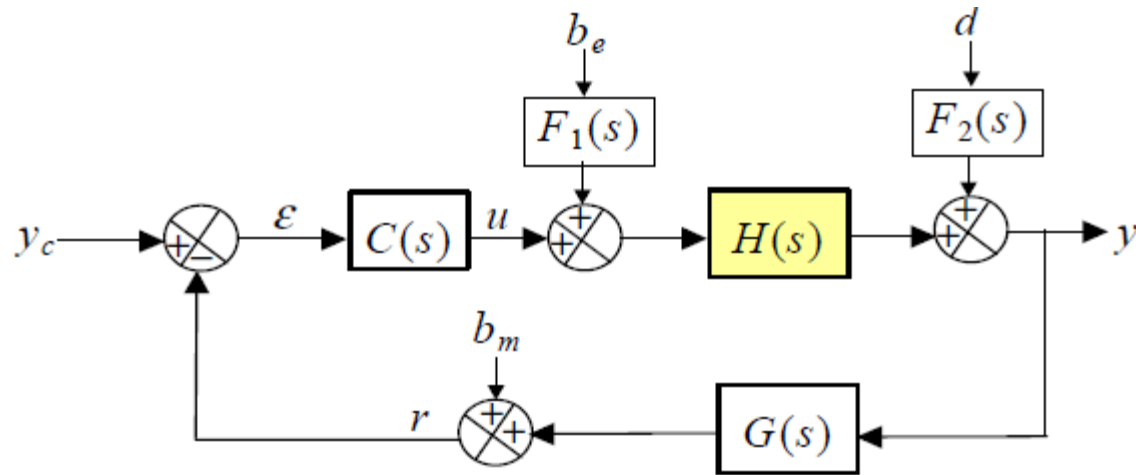
## 1. Schéma de principe d'un asservissement



- ❑  $y_c$  : consigne
- ❑  $\epsilon = y_c - y$  : signal d'erreur (écart entre consigne et sortie du système)
- ❑ Correcteur : élabore la loi de commande  $u$
- ❑ Actionneur : applique la commande au système. Joue en général le rôle d'amplificateur de puissance
- ❑  $y$  : sortie du système ou grandeur à asservir

# Analyse d'un système asservi

## 2. Structure fonctionnelle d'un asservissement



- ❑  $C(s)$  : fonction de transfert du correcteur
- ❑  $H(s)$  : fonction de transfert du système
- ❑  $G(s)$  : fonction de transfert de la boucle de retour (capteur en général)
- ❑  $r$  : signal de retour
- ❑  $d$  : perturbation externe (mesurable ou non),  $b_m$  : bruit de mesure
- ❑  $b_e$  : bruit d'entrée (bruit de transmission de  $u$  aux actionneurs)

# *Analyse du système asservi*

## *3. Propriétés d'un système asservi*

### ▪ Stabilité

Le système asservi doit fonctionner automatiquement. Il est indispensable qu'il soit stable. Autrement, le système évolue en s'éloignant de son point (ou trajectoire) d'équilibre, ce qui peut engendrer des saturations voire une dégradation du système.

### ▪ Précision

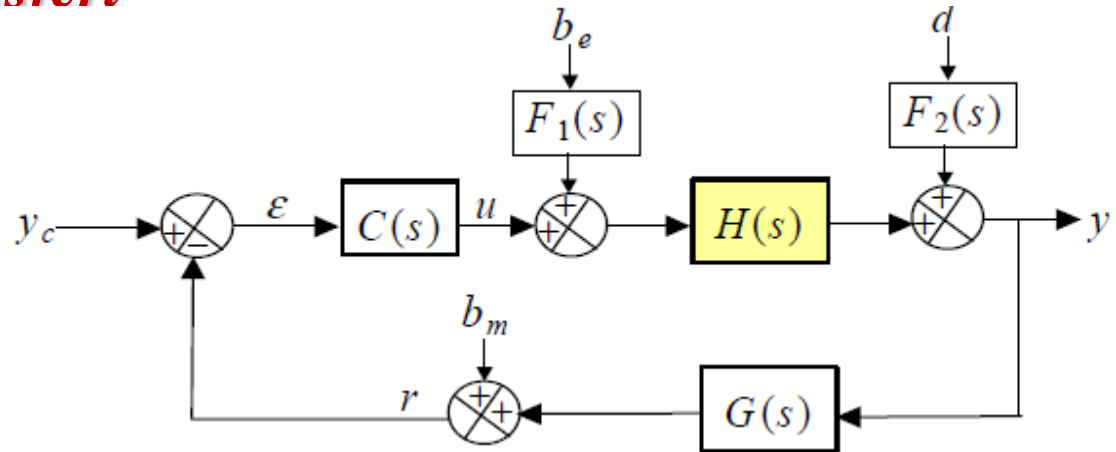
En régime permanent, la sortie du système asservi doit suivre la référence sans erreur et rejeter rapidement les perturbations

### ▪ Performances dynamiques

Elles caractérisent le temps de réaction du système lorsque la consigne varie ainsi que la rapidité avec laquelle le système asservi "efface" les perturbations

# Analyse d'un système asservi

## 3. Fonction de transfert



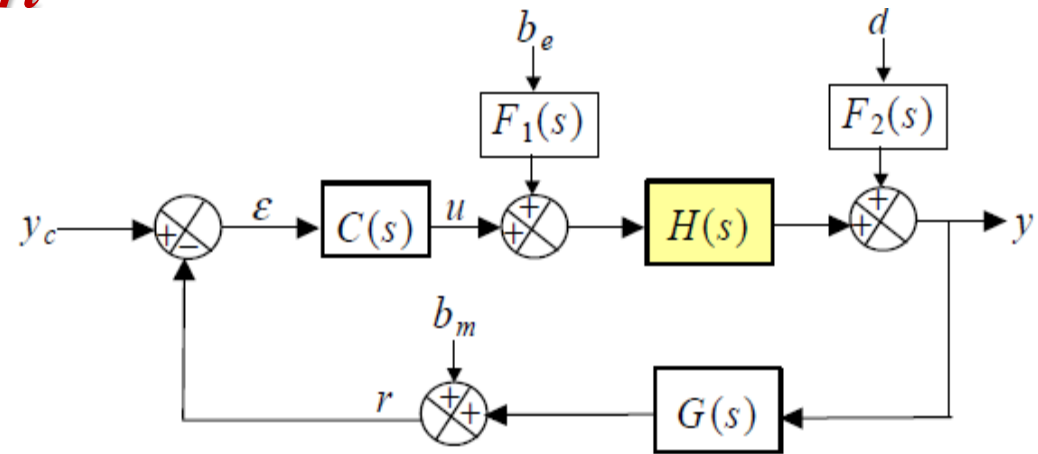
### ▪ Fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(s)$

Supposons que les perturbations et les bruits sont nuls. La fonction de transfert en boucle ouverte est la transmittance entre le signal d'erreur  $\varepsilon$  et le signal de retour  $r$  est:

$$H_{BO}(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = C(s)H(s)G(s)$$

# Analyse d'un système asservis

## 3. Fonction de transfert



### ▪ Chaîne directe

C'est la cascade de transmittance entre une entrée ( $y_c$  ou les perturbations  $d, b_m, b_e$ ) et la sortie  $y$ .

Entre  $y_c$  et  $y$  :  $C(s)H(s)$ ,

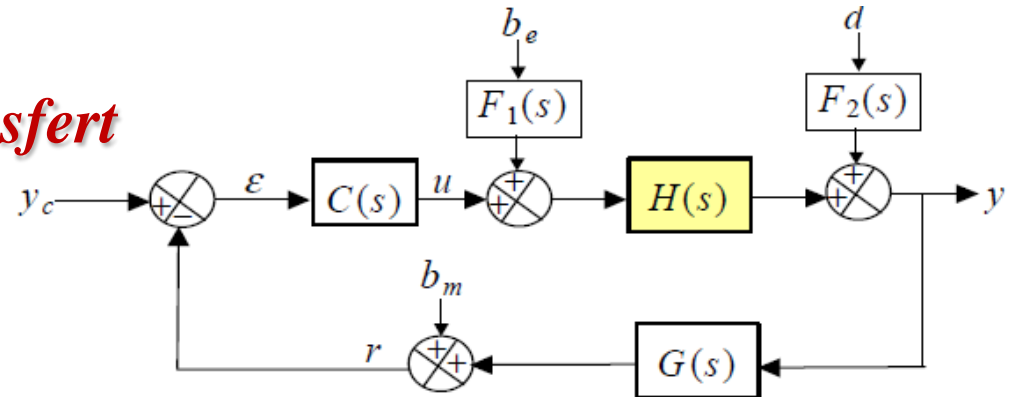
Entre  $d$  et  $y$  :  $F_2(s)$

Entre  $b_e$  et  $y$  :  $F_1(s)H(s)$ ,

Entre  $b_m$  et  $y$  :  $C(s)H(s)$

# Analyse d'un système asservi

## 3. Fonction de transfert



### ▪ Fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(s)$

C'est la transmittance entre la consigne  $y_c$  et la sortie  $y$

$$H_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)G(s)}$$

$$H_{BF}(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + H_{BO}(s)}$$

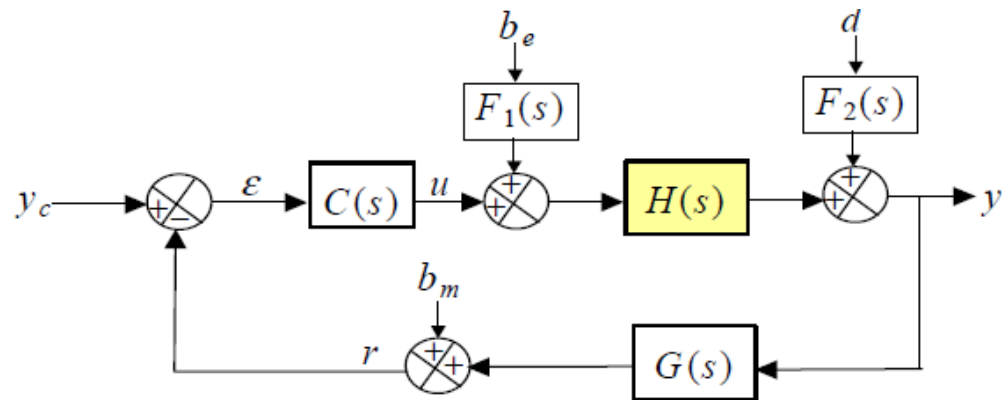
Si  $G(s)=1$ , on parle de retour unitaire. Dans ce cas particulier, on a :

$$H_{BF}(s) = \frac{H_{BO}(s)}{1 + H_{BO}(s)}$$



# Analyse d'un système asservi

## 4. Fonction de transfert entre la sortie $y$ et les perturbations



$$P_e(s) = \frac{Y(s)}{B_e(s)} = \frac{F_1(s)H(s)}{1 + H_{BO}(s)} \quad P_m(s) = \frac{Y(s)}{B_m(s)} = \frac{C(s)H(s)}{1 + H_{BO}(s)} = H_{BF}(s)$$

$$P_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{F_2(s)}{1 + H_{BO}(s)} \quad \text{avec} \quad H_{BO}(s) = C(s)H(s)G(s)$$

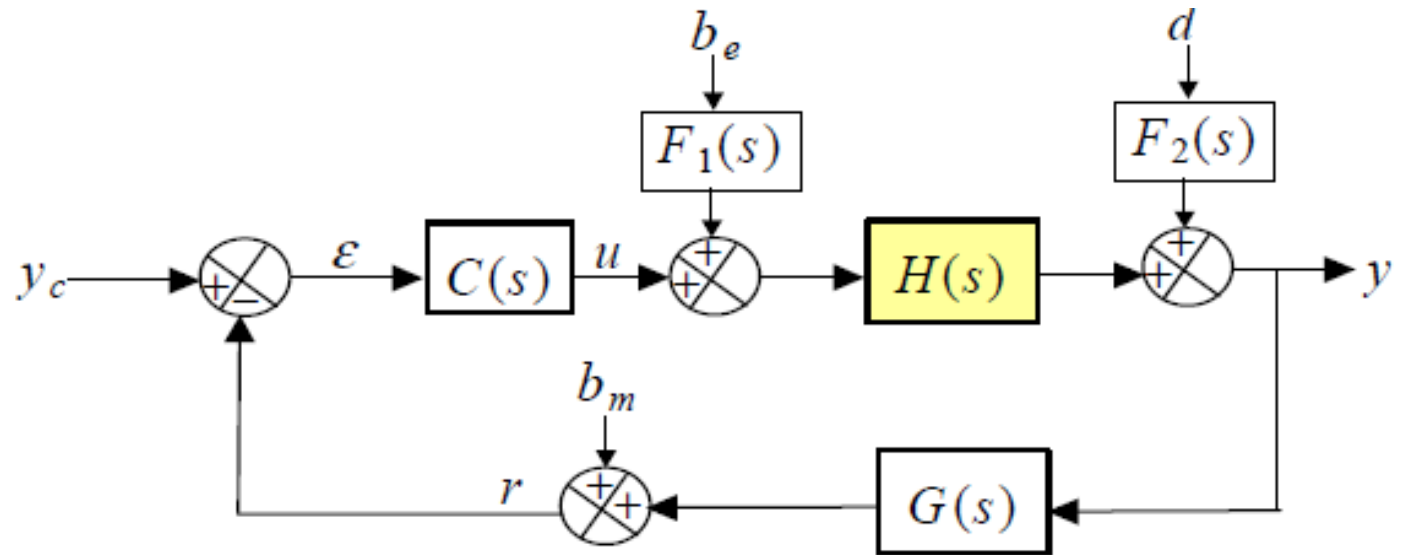
### Remarque

La fonction de transfert entre la sortie asservie  $y$  et une entrée est le rapport de la transmittance de la chaîne directe sur  $1 + H_{BO}(s)$ .

# Analyse d'un système asservi

## 3. Fonction de transfert

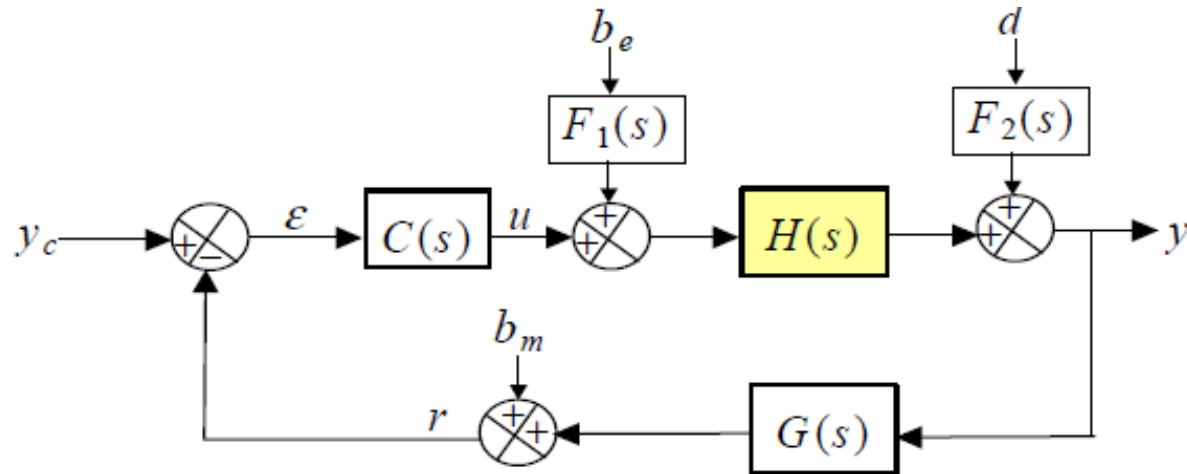
\* Fonction de transfert globale



$$H_{G_{BF}}(s) = H_{BF}(s) + P_e(s) + P_m(s) + P_d(s)$$

# Analyse d'un système asservi

## 5. Expression de la sortie d'un système bouclé



$$Y(s) = H_{BF}(s)Y_c(s) + P_e(s)B_e(s) + P_d(s)D(s) + H_{BF}(s)B_m(s)$$