Fiche TD N=3

Exercice 1

Une sphère métallique (C_P = 0,46 kJ/kg.K, k = 35 W/m.K) de 5 cm de diamètre, initialement à la température de 550°C est immergée brutalement dans une ambiance maintenue à une température constante de 80°C. Le coefficient de transfert convectif est égal à 10 $W/m^2.K$. Calculer le temps au bout duquel le centre de la sphère atteint la température de 100°C.

ρ = 7800 kg/m^3

Exercice 2

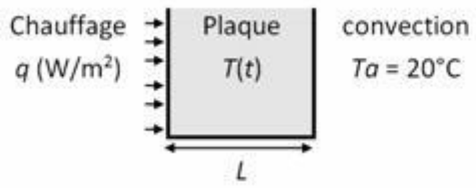
Un fer à repasser électrique est constitué d'une semelle métallique de masse $m = 1$ kg (ρ = 7840 kg/m^3; Cp = 450J/kg.°C ; k = 70 W/m.°C). Cette plaque métallique a une surface de $A = 0{,}025\ m^2$ et est chauffée par la face interne au fer par une résistance chauffante de 250 W. Initialement le fer est à la température uniforme Ti = 20 °C.

Au temps t = 0, le fer est branché. La semelle dissipe alors de la chaleur par convection avec l'air ambiant par la face extérieure (face opposée à la face chauffée). La température de l'air ambiant est Ta = 20 °C, le coefficient d'échange convectif métal/air est h_c = 50 $W/m^2.K^1$.

a. Écrire le bilan sur la semelle métallique à un temps t > 0.

b. Calculer la température de la face externe après 5 minutes de chauffage.

c. Calculer la température limite atteinte par la semelle du fer si celui-ci reste branché en permanence.



Exercice 3

Une plaque de 3,2cm d'épaisseur, initialement à la température de 25°C est soumis sur chacune de ses faces à un incrément de température de 90°C. Déterminer au bout de combien du temps, la température au milieu de la plaque atteindra 100°C, si la plaque est en acier et si elle est en liège.

Quelle sera à cet instant, la densité de flux de chaleur pénétrant par chacune des deux faces?

Peut-on évaluer approximativement, la quantité de chaleur emmagasinée à cet instant-là par mètre carré de la plaque?

− Les propriétés thermiques de l'acier: k=13 [kcal/h m°C], a=(k/rC)=3,9.10-6 [m^2/s]

− Les propriétés thermiques de liège: k=0,037 [kcal/h m°C], a=(k/rC)=1,56.10-7 [m^2/s].

Solution de fiche TD N 3

Exercice N=1

Solution

Données : $\rho := 7800\frac{kg}{m^3}$ $c_P := 0.46\frac{kJ}{kg\,K}$ $\lambda := 35\frac{W}{m\,K}$ $h_c := 10\frac{W}{m^2K}$ $T_0 := 550°C$

$T_F := 80°C$

$D_s := 5cm$ $R_s := \frac{D_s}{2}$ $V_s := \frac{4}{3}\pi R_s{}^3$ $S_s := 4\pi R_s{}^2$ $m_s := \frac{4}{3}\pi\rho R_s{}^3$ $T_c := 100°C$

On définit avec

$Bi = \frac{\frac{L}{\lambda S_s}}{\frac{1}{h_c S_s}}$ $L = R_s$ $Bi := \frac{h_c R_s}{\lambda}$ $Bi = 7.143\times 10^{-3}$

Bi est très inférieur à 0,1.
On peut considérer la température comme uniforme dans le solide.

$m_s c_P\frac{dT}{dt} = -h_c S_s(T - T_F)$ $\int_{T_0}^{T}\frac{1}{T-T_F}\,dT = -\int_0^t\frac{h_c S_s}{m_s c_P}\,dt$ $\ln\left(\frac{T_0-T_F}{T-T_F}\right) = \frac{1}{\tau}t$

$\tau := \frac{m_s c_P}{h_c S_s}$ $\tau = \frac{\rho R_s c_P}{3h_c}$ $\frac{7800\times 0.025\times 460}{3\times 10}$ $\tau = 2990s$ $\tau = 49.8min$

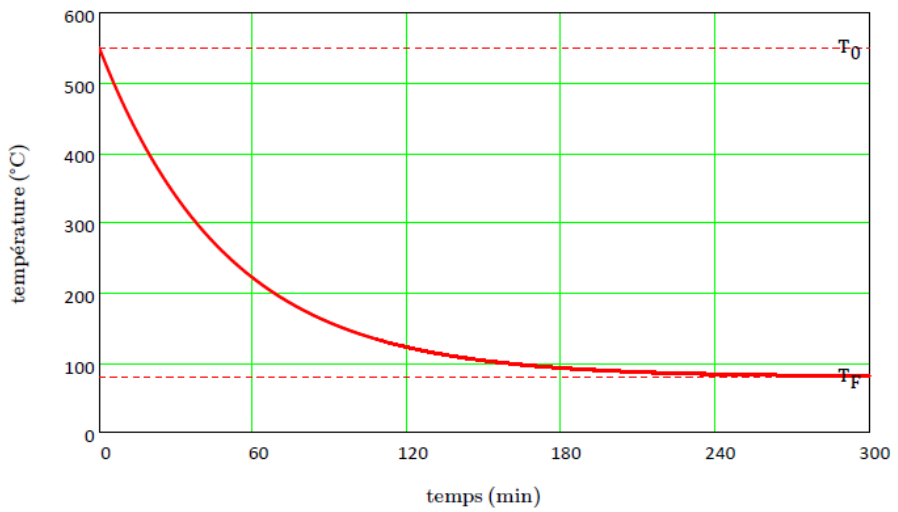
$5\tau = 14950s$ $5\tau = 249.2min$

$t(T) := \tau\ln\left(\frac{T_0-T_F}{T-T_F}\right)$ $t(T_c) = 2990\ln\left(\frac{550-80}{100-80}\right)$ $T_c = 100°C$ $t(T_c) = 9439s$

$t(T_c) = 157min$

$t(T_c) =$ "2:37:19.431" hhmmss

$T(t) := T_F + (T_0 - T_F)\exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]$



Exercice N=2

Solution

$\rho := 7840 \cdot \frac{kg}{m^3}$ $c_p := 450 \cdot \frac{J}{kg \cdot K}$ $\lambda := 70 \cdot \frac{W}{m \cdot K}$ $D_s := 5 \cdot cm$ $h_c := 50 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K}$ $T_i := 20°C$

$m_f := 1 \cdot kg$ $A_f := 0.025 \cdot m^2$ $P := 250 \cdot W$ $q := \frac{P}{A_f}$ $T_a := 20°C$

$m_f = \rho \cdot A_f \cdot L_f$ $L_f := \frac{m_f}{\rho \cdot A_f}$ $L_f = 5.1 \cdot mm$

$Bi := \frac{h_c \cdot L_f}{\lambda} = 3.644 \times 10^{-3}$ $\frac{50}{70} \frac{1}{7840 \cdot 0.025} = 3.644 \times 10^{-3}$

Bi est très inférieur à 0,1. On peut considérer la température comme uniforme dans le solide.

Bilan thermique :

$$m_f \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} = P - h_c \cdot A_f \cdot (T - T_a) \qquad \frac{m_f \cdot c_p}{h_c \cdot A_f} \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{P}{h_c \cdot A_f} + T_a - T \qquad \frac{dT}{\left(\frac{P}{h_c \cdot A_f} + T_a\right) - T} = \frac{h_c \cdot A_f}{m_f \cdot c_p} \cdot dt$$

En posant : $T_{max} := T_a + \frac{P}{h_c \cdot A_f}$ $T_{max} = 220 \cdot °C$ $\tau := \frac{m_f \cdot c_p}{h_c \cdot A_f}$ $\tau = 360 s$

$\tau = 6 \cdot min$

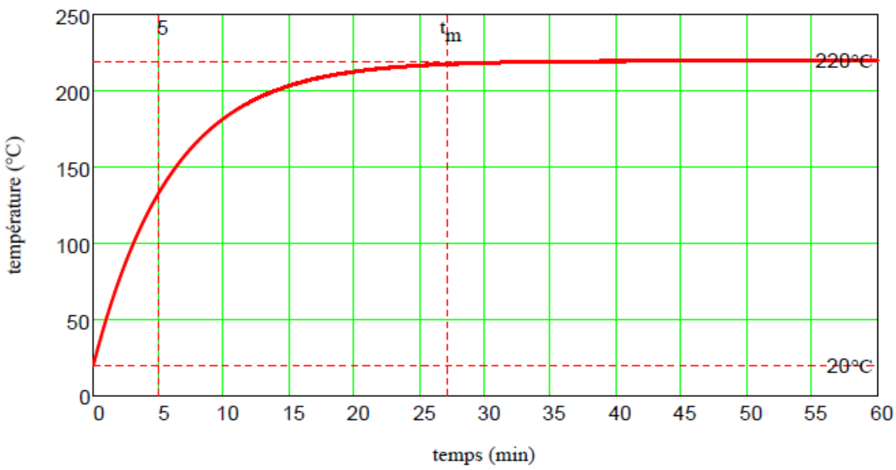
$$\int_{T_i}^{T} \frac{1}{T_{max} - T} dT = \int_0^t \frac{1}{\tau} dt \qquad \ln\left(\frac{T_{max} - T_i}{T_{max} - T}\right) = \frac{1}{\tau} \cdot t \qquad t(T) := \tau \cdot \ln\left(\frac{T_{max} - T_i}{T_{max} - T}\right)$$

$t_m := t(0.99 \cdot T_{max}) = 1624 s$ $t_m = 27.1 \cdot min$

$5 \cdot \tau = 30 \cdot min$

on peut écrire : $T(t) := T_{max} - (T_{max} - T_i) \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$ $T(5 \cdot \tau) = 219 K$

Pour t grand, T tends vers T_{max} $T(0 \cdot s) = 20 \cdot °C$ $T(5 \cdot min) = 133.1 \cdot °C$ $T(1 \cdot h) = 220.0 \cdot °C$

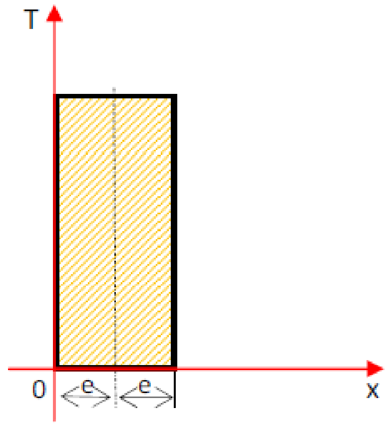


Exercice N=3

Solution

De l'équation (12) (voir le cours chapitre 3) donnant la solution de l'équation de la chaleur en régime transitoire, on peut écrire:

$$\frac{\theta}{\theta_i}=\frac{T-T_1}{T_i-T_1}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2\alpha t}.\sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right),(n=1,3,5,\dots)$$



- Les conditions initiales et les conditions aux limites:

C.I: à t=0, $\theta=\theta_i=T_1-T_i=90^oC$; $0<x<2e$

C.L: à x=0, $\theta=T_1-T=0$ pour $T=T_1$, $t>0$

à x=2e, $\theta=T_1-T=0$ pour $T=T_1$, $t>0$

Pour x=e:

$$\frac{T_1-T}{T_1-T_i}=\frac{4}{\pi}\left[e^{-\frac{\pi^2}{4.e^2}\alpha t}-\frac{1}{3}e^{-\frac{9.\pi^2}{4.e^2}\alpha t}+\frac{1}{5}e^{-\frac{25.\pi^2}{4.e^2}\alpha t}-\frac{1}{7}e^{-\frac{49.\pi^2}{4.e^2}\alpha t}+\cdots\right]\approx\frac{4}{\pi}e^{-\frac{\pi^2}{4.e^2}\alpha t};$$

- Réduction de la somme à son premier terme.

$$\Rightarrow\frac{T_1-T}{T_1-T_i}=\frac{4}{\pi}e^{-\frac{\pi^2}{4.e^2}\alpha t}$$

$$\Rightarrow\frac{T_1-T}{T_1-T_i}=\frac{T_1-T_i+T_i-T}{T_1-T_i}=1+\frac{T_i-T}{T_1-T_i}=1+\frac{25-100}{90}=\frac{1}{6}=\frac{4}{\pi}e^{-\frac{\pi^2}{4.e^2}\alpha t}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\pi^2}{4.e^2}\alpha t}=\frac{\pi}{24}\Leftrightarrow-\frac{\pi^2}{4.e^2}\alpha t=ln\left(\frac{\pi}{24}\right)\Rightarrow t=-\frac{4.e^2}{\pi^2.\alpha}.ln\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$t=-\frac{4.e^2}{\pi^2.\alpha}.ln\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

- Pour l'acier: $t=-\frac{4.(0{,}016)^2m^2}{\pi^2.3{,}9.10^{-6}\,[\mathrm{m^2/s}]}.ln\left(\frac{\pi}{24}\right)=54{,}10s;$

- Pour le liège: $t=-\frac{4.(0{,}016)^2m^2}{\pi^2.1{,}56.10^{-7}\,[\mathrm{m^2/s}]}.ln\left(\frac{\pi}{24}\right)=1352{,}33s\approx22{,}54\,min$

- **La densité de flux de chaleur pénétrant par chacune des deux faces est:**

$$q(x,t) = \varphi(x,t) = -k\frac{\partial T}{\partial x} = -k\frac{\partial(T_1-\theta)}{\partial x} = +k\frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2\alpha t}.\sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right);$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \theta_i\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2\alpha t}.\frac{n\pi}{2e}.\cos\left(\frac{n\pi}{2e}x\right) = \frac{2\theta_i}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2\alpha t}.\cos\left(\frac{n\pi}{2e}x\right) \approx \frac{2\theta_i}{e}.e^{-\frac{\pi^2}{4.e^2}\alpha t};$$

$$\varphi(e,t) = \frac{2k(T_1-T_i)}{e}.e^{-\frac{\pi^2}{4.e^2}\alpha t};$$

- ✓ Pour l'acier: k=13 [kcal/h m°C], α=(k/ρC)=3,9.10^{-6} [m^2/s], t=54,10s

$$\varphi(e,t) = \frac{2k(T_1-T_i)}{e}.e^{-\frac{\pi^2}{4.e^2}\alpha t} = \frac{(2.13\ \text{kcal/h m C}.90\ \text{C}).1{,}16}{0{,}016m}.e^{-\frac{\pi^2}{4.(0{,}016)^2m^2}3{,}9.10^{-6}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}.54{,}10s};$$

$$\varphi(e,t) = 22{,}235.\,kW/m^2$$

- ✓ Pour le liège: k=0,037 [kcal/h m°C], α=(k/ρC)=1,56.10^{-7} [m^2/s], t=1352,33s

$$\varphi(e,t) = \frac{2k(T_1-T_i)}{e}.e^{-\frac{\pi^2}{4.e^2}\alpha t} = \frac{(2.0{,}037\frac{\text{kcal}}{\text{h}}\text{m C}.90\ \text{C}).1{,}16}{0{,}016m}.e^{-\frac{\pi^2}{4.(0{,}016)^2m^2}1{,}56.10^{-7}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}.1352{,}33s};$$

$$\varphi(e,t) = 63{,}28\,W/m^2$$

- **La quantité de chaleur emmagasinée à cet instant par mètre carré de la plaque est:**

$Q = mC\Delta T = \rho VC\Delta T$; S=1m^2, E=2e=2.0,016 m, V=2.0,016 m^3, C=(k/ρα)

$$\Rightarrow Q = \rho V\frac{k}{\rho\alpha}.\Delta T = \frac{Vk}{\alpha}.\Delta T;$$

- ✓ Pour l'acier: k=13 [kcal/h m°C], α=(k/ρC)=3,9.10^{-6} [m^2/s]

$$Q = \frac{Vk}{\alpha}.\Delta T = \frac{(2.0{,}016m^3.13\ kcal/hmC).1{,}16}{3{,}9.10^{-6}m^2/s}.90C = 111{,}36.\,10^5 J/m^2$$

- ✓ Pour le liège: k=0,037 [kcal/h m°C], α=(k/ρC)=1,56.10^{-7} [m^2/s]

$$Q = \frac{Vk}{\alpha}.\Delta T = \frac{(2.0{,}016m^3.0{,}037\ kcal/hmC).1{,}16}{1{,}56.10^{-7}m^2/s}.90C = 7{,}92.\,10^5 J/m^2;$$