Fiche TP 1

(Méthode de Gauss et Gauss-Jordan)

Exercice 1 :

1) Résoudre le système linéaire Ax=b par la méthode du pivot de Gauss
2) Déduire le déterminant.

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 8 \\ 3x + 3y - 5z = 14 \\ 4x + 5y - 2z = 16 \end{cases}$$

Solution :

1) Résolution du Système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 8 \\ 3x + 3y - 5z = 14 \\ 4x + 5y - 2z = 16 \end{cases}$$

a) Ecriture du système sous la forme Ax=b

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

b) Identification de la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 3 & 3 & -5 & 14 \\ 4 & 5 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{|l} L1 \ (L1 \textit{ représente la premiere ligne}) \\ L2 \ (L2 \textit{ représente la deuxieme ligne}) \\ L3 \ (L3 \textit{ représente la troisieme ligne}) \end{array}$$

c) Triangulation : transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure

Pour K=1, pivot=a_{11}= 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 3 & 3 & -5 & 14 \\ 4 & 5 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{|l} L1 \\ L'_{2j} = L_{2j} - \left(\frac{3}{2}\right) * L_{1j} \\ L'_{3j} = L_{3j} - \left(\frac{3}{2}\right) * L_{1j} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1{,}5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|l} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{array}$$

Explication:

- Les éléments de la 1ère colonne de A en dessous de a11 (pivot) sont mis à zéros.
- Soit la formule suivante: **$L'_{ij} = L_{ij} - (a_{ik} / \text{pivot}) * a_{kj}$**

Avec : i représente le numéro de ligne, j représente le numéro de colonne.

Pour i=1: la ligne L_1 ne change pas

Pour i=2: $L'_{2j}=L_{2j}-(a_{2k}/\text{pivot})*a_{kj}=L_{2J}-(a_{21}/2)*a_{1j} = L_{2j}-(3/2)*L_{1j}$
(avec j=1 à n)

Pour i=3: $L'_{3j}=L_{3j}-(a_{3k}/\text{pivot})*a_{kj}=L_{3J}-(a_{31}/2)*a_{1j} = L_{3j}-(3/2)*L_{1j}$
(avec j=1 à n)

Pour K=2, pivot=a_{22}=3/2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1,5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \left| \begin{array}{c} L_1 \\ L'_2 \\ L''_3 = L'_3 - 2L'_2 \end{array} \right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1,5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Explication:

- Les éléments de la 2eme colonne de A en dessous de a22 (pivot) sont mis égales à zéros.
- Soit la formule suivante: **$L'_{ij} = L_{ij} - (a_{ik} / \text{pivot}) * a_{kj}$**

Avec : i représente le numéro de ligne, j représente le numéro de colonne.

Pour i=1: la ligne L_1 ne change pas

Pour i=2: la ligne L'_2 ne change pas

Pour i=3: $L''_{3j} = L'_{3j} - (a_{3k}/\text{pivot}) * a_{kj} = L'_{3J} - (a_{32}/2) * a_{2j} = L'_{3j} - (2) * L'_{2j}$

(avec j=2 à n)

d) Resolution du système

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 8 \\ (1,5)y + z = 2 \\ 4z = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y + 4 = 8 \\ (1,5)y - 1 = 2 \\ z = -\frac{4}{4} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 2 + 4 = 8 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

2) Déduire le déterminant :

$$\det(A) = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

p : le nombre de permutation de lignes ou de colonnes effectuées lors de l'application de l'algorithme de GAUSS.

n : la dimension de la matrice

a_{ii} : la diagonale de la matrice triangulaire supérieure.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1,5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Diagonale de la matrice triangulaire supérieure de

det(A) = $(-1)^0 * (2 * 1,5 * 4) = 12$

Exercice 2 :

1) Résoudre le système linéaire Ax=b par la méthode de Gauss Jordan.
2) Déduire le déterminant.
3) Déduire la matrice inverse de la matrice A.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Solution :

1) Résolution du Système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

a) Ecriture du système sous la forme Ax=b

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Identification de la matrice augmentée

$$\left(\overbrace{\begin{matrix}1&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{matrix}}^{\mathbf{A}}\middle|\overbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}^{\text{Matrice Identité}}\middle|\overbrace{\begin{matrix}4\\5\\3\end{matrix}}^{b}\right)$$

Mettre à zéro

Explication :

- On transforme la matrice A de façon à obtenir une matrice diagonale, avec le même principe de la méthode de Gauss.
- Mettre à zéro tous les coefficients de la matrice A sauf les coefficients de la diagonale.

Etape 1 :

K=1, pivot= a11= 1 :

Explication :

Les éléments de la 1ère colonne de A en dessous de a11 (pivot) sont mis à zéros.
- Soit la formule suivante: **$L'_{ij} = L_{ij} - (a_{ik} / \text{pivot}) * a_{kj}$**

Avec : i représente le numéro de ligne, j représente le numéro de colonne.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{|l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{|l} L1 \\ L'2j = L2 - 2L1 \\ L'3j = L3 - L1 \end{array}$$

Etape 2 :

K=2, pivot=a22=-2 :

Explication :

- Les éléments de la deuxième colonne de la matrice A en dessous et au dessus de a22 (pivot) sont mis à zéro.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|l} L'1j = L1j + L'2j \\ L'2 \\ L''3j = L'3j - \frac{1}{2} L'2j \end{array}$$

Etape 3 :

K=3, pivot=a33=1/2 :

Explication :

- Les éléments de la troisième colonne de la matrice A au dessus de a33 (pivot) sont mis à zéro.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \left| \begin{array}{c} L'1 \\ L''2j = L'2j + 2L''3j \\ L''3j \end{array}\right.$$

> <u>Remarque :</u>
>
> On peut calculer le déterminant de la matrice A, à partir de la diagonale de la matrice A trouvée dans l'étape 3.

<u>Etape 4 :</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \left| \begin{array}{c} L'1 \\ L'''2j = \dfrac{L''2j}{-2} \\ L'''3j = L''3j * 2 \end{array}\right.$$

$$\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\text{Matrice Identité}} \left| \underbrace{\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}}_{\text{Matrice Inverse}} \right| \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}}_{\text{La solution}}\right)$$

2) <u>Le déterminant :</u>

$$\det(A) = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

det(A)= $(-1)^0$ (1)*(-2)*(1/2) = -1

3) <u>La matrice inverse :</u>

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

Soit le système linéaire Ax=b suivant :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ecrire un Script Matlab qui permet de résoudre le système linéaire Ax=b par la méthode du pivot de Gauss.

Solution :

```
clc,
clear all,
close all
%Nombre de variables et d'équations
n=4;
%Initialisation de la matrice du système 'a(4x4)'
a=[10 7 8 7;7 5 6 5;8 6 10 9;7 5 9 10];
%Initialisation du vecteur des données 'b(4x1)'
b=[4 3 3 1]';
%Formation de la matrice augmentée A(4x5) = (a|b)
A=[a b];
%Algorithme de triangularisation de Gauss
for k=1:n-1
    for i=k+1:n
        A(i,:)=A(i,:)-(A(i,k)/A(k,k))*A(k,:);
    end
end
A
%Extraction de la solution du système d'équations
for i=n:-1:1 s=0;
     for j=i+1:n
         s=s+A(i,j)*x(j);
     end
   x(i)=(A(i,n+1)-s)/A(i,i);
end
xgauss=x’
```