Chapitre 4: Transfert de chaleur par convection

Introduction

La convection est un mécanisme du transfert de chaleur entre deux milieux de phases différentes ou entre deux régions du même milieu en présence d'un mouvement du fluide (gaz ou liquide). On distingue deux types principaux de convection, convection naturel et convection forcée.

En **convection naturelle**, le mouvement du fluide est cause par les effets de flottabilité due au variation de la densité de fluide (qui nécessite une différence de température). Par contre,

En **convection forcée**, un gradient de pression impose provoque l'écoulement du fluide. Cependant, la force de flottabilité diminue lorsque la densité de fluide approche celle du fluide environnant.

La vitesse du fluide atteint un maximum et ensuite, tend vers zéro loin de la surface chaude. Ce transfert de chaleur est caractérisé par un coefficient (h), dépendant de plusieurs paramètres; la densité, la viscosité, la vitesse du fluide ainsi que les propriétés thermiques.

L'objectif principal de l'étude de phénomène de la convection, consiste essentiellement a:

a. La compréhension et la modélisation de ce phénomène pour la prédiction de ses effets dans les équipements relatifs et même dans l'environnement;

b. Le dimensionnement et le choix de matériaux convenables des appareils, équipements et installations de chauffage et de refroidissement;

c. L'amélioration de performances des systèmes de refroidissement des composants électroniques (processeurs par exemple, pour atteindre une vitesse optimale de traitement des données);

d. Calcul du coefficient d'échange de chaleur par convection (h),

e. L'établissement des corrélations empiriques utilisées pratiquement pour le calcul et le dimensionnement.

Développement des équations générales de conservation

L'écoulement de fluide est un phénomène complexe qui ne se prête pas toujours à une analyse mathématique rigoureuse. Par commodité, tout volume fluide peut être assimile à un ensemble continu (continum) de particules fluides. Leur étude en mouvement peut être abordée analogiquement à celle des points matériels intervenant en mécanique générale. Les équations gouvernantes pour un écoulement transitoire, tridimensionnel, compressible et visqueux (avec frottement et conduction thermique, sans diffusion de la matière (c.à.d. sans gradients de concentration)) ou le phénomène est dissipatif (augmentation de l'entropie de l'écoulement), sont bases sur trois principes fondamentaux, à savoir:

Le principe de conservation de la masse, à partir duquel on établit l'équation de continuité;

- Le principe de conservation de la quantité de mouvement, à partir duquel on établit les trois équations de Navier-Stokes;
- le principe de conservation de l'énergie, d'où découle l'équation d'énergie relative à l'écoulement.

Equation de continuité

L'accumulation en quantité de masse dans un volume de contrôle par unité de temps est égale à la quantité de masse qui entre moins celle qui sort du volume par unité du temps (ou, le taux de variation de la masse de fluide contenue dans un volume de contrôle (CV) est égal au débit massique entrant moins le débit massique sortant du (CV)). De ceci on extrait l'équation générale de la conservation de masse (voir **Fig.13**).

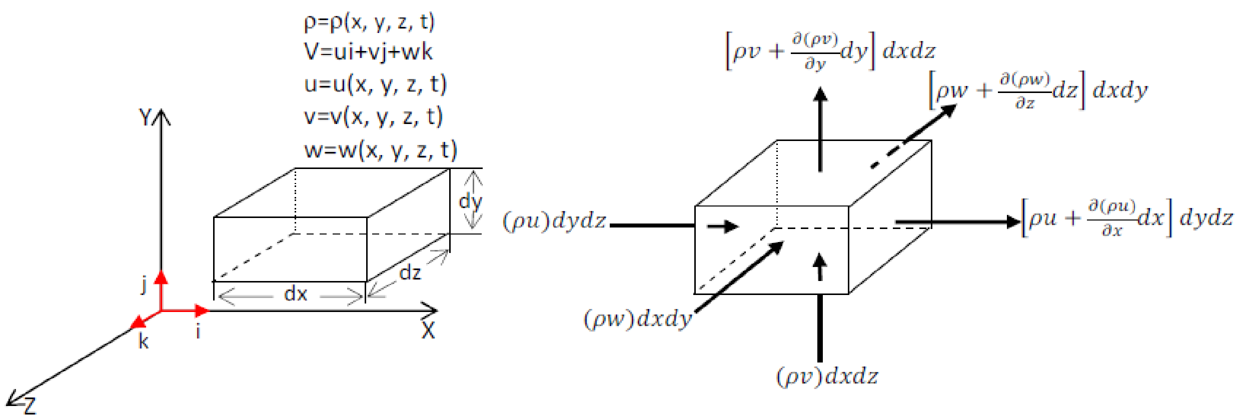

Figure 1 : Volume infinitésimal d'un élément fixe du fluide (Modèle utilise pour la dérivation de l'équation de continuité)

Sous forme vectorielle, elle est donnée par:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\right) = 0 \qquad 1$$

Avec;

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$: Taux de variation de la masse volumique par unité du temps;

$\nabla.\left(\rho \vec{V}\right)$: Taux de convection de masse par unité de volume$\vec{V} = u\vec{I} + v\vec{J} + w\vec{K}$

Equations de la conservation de la quantité de mouvement

La quantité du mouvement étant une quantité transportable, elle obéit aux lois de transport, par conséquent, elle est transporté par:

− **Convection**: ou les particules entrent dans le volume de contrôle par leur propre vitesse;

− **Diffusion**: dans ce cas, chaque particule cède sa vitesse à la particule placée devant elle par choc, et ceci jusqu'à l'entrée de la quantité transportable (quantité de mouvement) dans le volume de contrôle ou sa sortie du volume. De ceci découlent les équations de Navier-Stokes.

L'application de la deuxième loi fondamentale de la dynamique appliquée à une particule fluide en mouvement mené aux équations de conservation de quantité de mouvement ou équations de Navier-Stokes.

Relativement à la figure (**2**), ci-dessous et sous forme conservative, elles peuvent être données par:

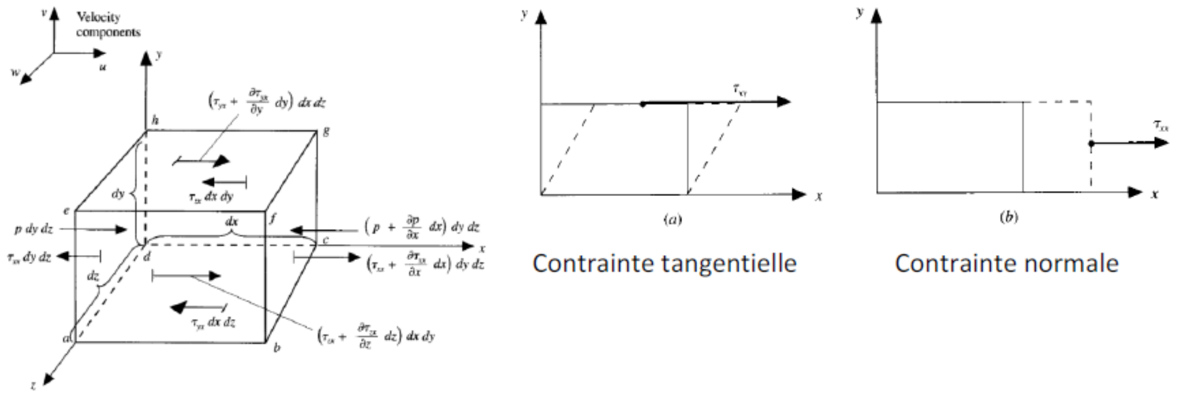

Figure 2: Volume infinitésimal d'un fluide en mouvement (Modèle utilise pour la dérivation des équations de quantité de mouvement)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho u\vec{V}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \qquad \text{a 1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho u\vec{V}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \qquad \text{a 2}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho u\vec{V}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \qquad \text{a 3}$$

Tels que;

f_x, f_y, f_z Composantes des forces de gravite par unité de masse;

$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$: forces de pression;

$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \dots \dots . \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$: Forces de surfaces;

Les contraintes (τ_{xx}, ... τ_{zz}), Pour un fluide Newtonien sont liées linéairement aux taux de déformation par l'intermédiaire de la viscosité dynamique du fluide, par les expressions suivantes:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right); \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right); \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad 2$$

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{2}\mu(\nabla.\vec{V}) + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \tau_{yy} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla.\vec{V}) + 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right); \tau_{zz} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla.\vec{V}) + 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad 3$$

Si les forces de gravite sont négligeables du système d'équations de quantité de mouvement, les termes à gauche représentent le taux de variation local de la quantité de mouvement et son transport par convection, et les termes à droite représentent le gradient de pression et le transport par diffusion.

Equation de conservation de l'énergie

L'équation d'énergie peut être obtenue par application du premier principe de la thermodynamique a un élément de fluide en mouvement: le taux variation de l'énergie a l'intérieur de l'élément du fluide est égale au flux net de chaleur dans l'élément plus le taux du travail sur l'élément du fluide dû aux forces de gravite et les forces de surfaces.

$$\frac{du}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{dw}{dt} \Leftrightarrow A + B + C$$

Considérons toutes les forces de surfaces (pression plus contraintes tangentielles et normales) montrées sur la figure (**3**) ci-dessous.

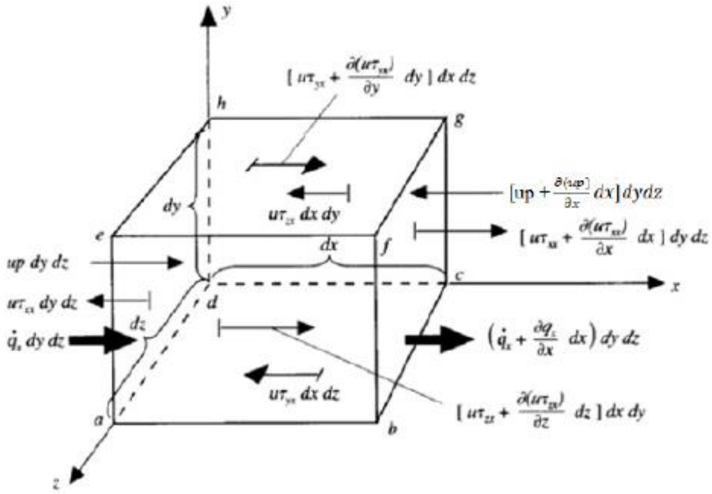

Figure 3 : Flux d'énergie associes avec un élément de fluide en mouvement (Modelé utilise pour la dérivation de l'équation d'énergie)

Le travail net sur l'élément de fluide est la somme des forces de surface dans toutes les directions (x, y et z) plus les forces de gravite. Ce dernier peut être donne par:

$$\boldsymbol{c = \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z} \right) + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] dxdydz + \rho\vec{f}.\vec{V}dxdydz} \qquad 4$$

Le flux de chaleur net dans le l'élément de fluide est du à deux sources, source de chaleur volumétrique telle que l'absorption ou l'émission du rayonnement et a un transfert de chaleur à travers les surfaces à cause des gradients de température (conduction thermique). Soient ($\dot{q}$) est la source volumétrique de chaleur par unité de masse et ($\dot{q}_{x,y,z}$), le flux de chaleur du a la conduction thermique est donne par la loi de Fourier. Le flux net de chaleur dans l'élément de fluide est donne par:

$$B = \left[\rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial xy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \right] dxdydz$$

Tel que; k représente la conductivité thermique [W/m.°C]

Considérons un milieu gazeux en mouvement. L'élément fluide dans ce cas a deux contribution d'énergie: l'énergie interne due au mouvement libre de ces molécules (e, par unité de masse) et une énergie cinétique due au mouvement de translation de l'élément fluide, l'énergie cinétique par unité de masse est donnée par ($V^2/2$). Donc, l'énergie totale est donnée par ($e+ V^2/2$). Finalement, la variation temporelle de l'énergie totale par unité de masse est donnée par:

$$A = \rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) dxdydz \qquad 5$$

La forme conservative de l'équation d'énergie peut être donc donnée par:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \nabla.\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right] = \rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(wp)}{\partial z}\right) + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} + \rho\vec{f}.\vec{V} \qquad 6$$

Sous une autre formulation, le bilan net d'énergie thermique par unité de volume du fluide est donne par:

$$\rho\frac{D\bar{u}}{Dt} = -div\vec{q} - \vec{\vec{\tau}}\otimes\overrightarrow{grad\vec{V}} - p\,div\vec{V} \qquad 7$$

Tels que;

$-div\vec{q}$: Représente le bilan net du flux de chaleur se propageant par conduction : $div\vec{q} = -k\nabla^2 T$

$-\vec{\vec{\tau}}\otimes\overrightarrow{grad\vec{V}}$: Est la dissipation visqueuse qui représente la vitesse de transformation irréversible de l'énergie visqueuse (mécanique) en énergie thermique. Ce terme est toujours de signe (+) et peut être représente par: ($-\vec{\vec{\tau}}\otimes\overrightarrow{grad\vec{V}} = \mu\Phi$); dans le cas d'un fluide newtonien, F est la fonction de dissipation donnée par:

$$\emptyset = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right]^2$$

$-p\,div\vec{V}$:Est l'augmentation par unité de volume de l'énergie interne d'élément par des forces de compression. Il représente la vitesse de transformation réversible de l'énergie de pression en énergie thermique. Ce terme peut être (-) ou (+), selon qu'il s'agit d'une compression ou d'une expansion.

L'énergie interne ($\bar{u}$) peut être considérée comme une fonction du volume spécifique $\hat{V}$ et de la température T. Ainsi, on peut écrire ($\hat{V} = {}^1/_\rho$), donc:

$$d\bar{u} = \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\hat{V}}\right)_T d\hat{V} + \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} dT$$

Tels que;

$\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} = C_v$: Est la chaleur spécifique a volume constant et comme : $\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\hat{V}}\right)_T = T\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} - p$

$$\Rightarrow \mathrm{p}\frac{D\bar{u}}{DT} = \rho C_v\frac{DT}{Dt} + \left[T\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} - p\right]\rho\frac{D\hat{V}}{Dt} \qquad 8$$

Tel que; $\frac{D\hat{V}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$ et d'après l'équation de continuité :

$div\vec{V} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \Rightarrow \frac{D\hat{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}div\vec{V}$

L'équation du bilan thermique devient:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -div\vec{q} - \vec{\vec{\tau}}\otimes\overline{grad\vec{V}} - pdiv\vec{V} - \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} - p\right]div\vec{V} \qquad 9$$

Apres simplification:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -div\vec{q} - \vec{\vec{\tau}}\otimes\overline{grad\vec{V}} - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} div\vec{V} \qquad 10$$

Hypothèses relatives au modèle thermique

Dans la plupart des cas rencontres dans la pratique a l'exception des transferts de chaleur dans les lubrifiants ou de l'extrusion des plastiques, le terme de dissipation visqueuse $\vec{\vec{\tau}}\otimes\overline{grad\vec{V}}$ est négligeable.

- Par ailleurs, si l'on considère que la conductivité thermique (λ) est indépendante de la direction de l'écoulement et de la température, l'équation (50) se simplifie en:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = \lambda\nabla^2 T - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} div\vec{V} \qquad 11$$

- Pour un gaz parfait $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} = \frac{p}{T}$

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = \lambda\nabla^2 T - pdiv\vec{V} \qquad 12$$

Concept de la couche limite

La figure (16) montre la distribution de la vitesse aux différentes stations à partir du bord d'entrée d'une plaque plane horizontale. A partir de cette arrête, une région se développe dans l'écoulement et ou les forces visqueuses ralentissent le mouvement du fluide.

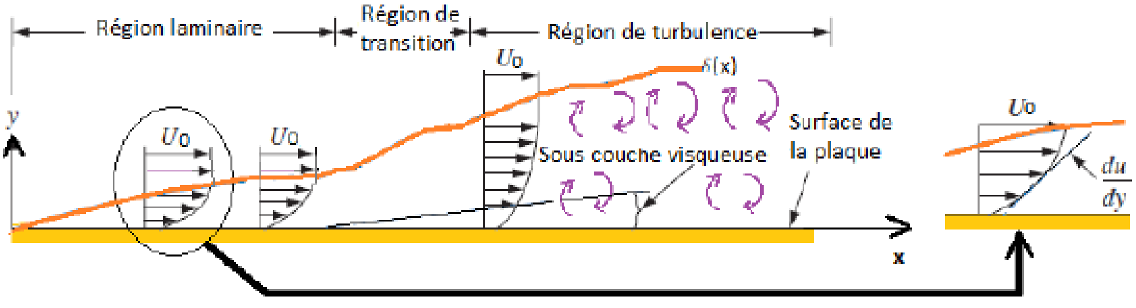

Figure 4 : Ecoulement sur une plaque plane-Profiles de vitesse en couche limite (laminaire, de transition et de turbulence)

Les forces visqueuses dépendent de la contrainte tangentielle donnée par:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} \qquad 13$$

Tels que ;

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dy} : \text{le gradient de vitesse} \\ \mu : \text{la viscosite dynamique} \end{cases}$$

La région de l'écoulement près de la paroi (surface de la plaque) ou la vitesse du fluide diminue par les forces visqueuses est appelée **couche limite,** Ludwing Prandtl (1905). La distance verticale à partir de la surface de la plaque jusqu'à la vitesse atteint (99%) de celle du courant libre, désigne **l'épaisseur de la couche limite (δ).**

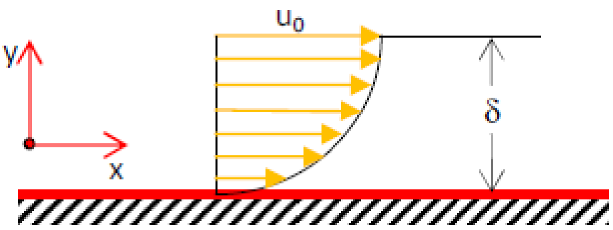

Figure 5 : Couche limite au voisinage d'une paroi solide

Au début, le régime d'écoulement dans la couche limite est complètement laminaire. L'épaisseur de la couche limite augmente en fonction de la distance (x). A une **distance critique (x_c)**, les effets d'inertie deviennent suffisamment grands compares aux forces visqueuses, une région de transition (du régime laminaire vers le régime turbulent), se développe. Dans la région de turbulence, des morceaux macroscopiques de fluide se déplacent avec les lignes de courant, en transportant efficacement l'énergie thermique et la quantité de mouvement.

Le paramètre adimensionnel qui relie quantitativement les forces visqueuses et inertielles et dont sa valeur détermine la transition du régime laminaire vers le régime turbulent est le nombre de Reynolds (Re_x) donne par:

$$Re_x = \frac{\rho u_0 x}{\mu} = \frac{u_0 x}{v} \qquad 14$$

Tels que :

$$\begin{cases} u_0 : \textit{la vitesse du courant libre} \\ x : \textit{la distance àpartir du bord} \\ v = (\mu/\rho) : \textit{la viscosité cinématique du fluide} \\ \rho : \textit{la densité du fluide} \end{cases}$$

La distance (x_c) à partir du bord de la plaque jusqu'à l'apparition de la région de transition est donnée par:

$$x_c = \frac{Re_x v}{u_0} \qquad 15$$

Développement de l'équation d'hydrodynamique sur une plaque plane verticale en convection naturelle

La convection naturelle résulte du mouvement du fluide engendre par la variation de la densité. Par exemple, l'air en contact avec une surface chaude s'échauffe, sa densité diminue et en présence de la gravite, il monte vers le haut due à la flottabilité en laissant un vide. L'air froid du milieu environnant se déplace pour remplir ce vide et un courant d'air ascendant s'établit.

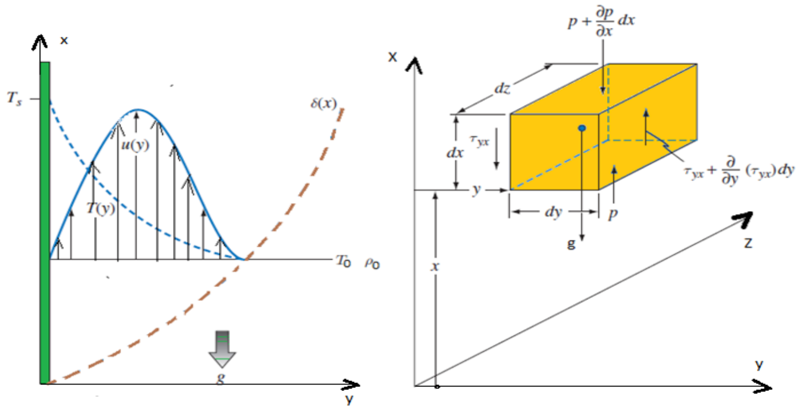

Figure 6 : Plaque plane verticale: distribution de vitesse et de température

La force conductrice ou motrice en convection libre est l'action de la flottabilité ou la poussée d'Archimède. Considérons le panneau (de fluide) représente sur la figure ci-dessus, parallèlement à la plaque plane verticale. Lorsque le fluide est en mouvement, en plus des forces de flottabilité (poussée d'Archimède), il y a les forces de pression et celles de frottement. En régime stationnaire (permanent), les forces totales agissant sur l'élément de volume (dxdydz) sont données comme suit:

1. Les forces dues au gradient de pression:

$$pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz$$

2. Le poids de l'élément de volume (dxdydz):

$$dp = -g\rho dxdydz$$

3. Les forces de cisaillement (de frottement) due au gradient de vitesse:

$$-\tau_{yx} dxdz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) dxdz = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dxdydz, \left(\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

4. Le taux de variation de la quantité de mouvement de l'écoulement de fluide est donne par:

$$\rho dxdydz \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

Par application de la seconde loi de Newton sur l'élément de fluide, il en résulte:

$$\rho dxdydz \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dxdydz - g\rho dxdydz$$

$$\Rightarrow \rho \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho g$$

On suppose qu'à chaque hauteur la pression est uniforme et le fluide non chauffe loin de la paroi de plaque est en équilibre hydrostatique, par conséquent:($\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 g$) D'où, l'équation du mouvement devient:

$$\Rightarrow \rho \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right] = g(\rho_0 - \rho) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Pour les fluides incompressibles, on suppose que la densité est seulement fonction de la température mais, pour les gaz, on suppose que la dimension verticale (dx) de l'élément considère est petite de telle sorte que la densité hydrostatique (ρ_0) est constante (Hypothèse de Boussinesq). Avec ces hypothèses, le terme de flottabilité peut être écrit sous la forme suivante:

$$g(\rho_0 - \rho) = -g\rho\beta(T_0 - T)$$

Tel que (β) est le coefficient de dilatation thermique défini par:$\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial T}\lfloor_p$ pour les gaz idéal ($\beta = {}^{1}/_{T_0}$). Finalement, l'équation du mouvement pour la convection naturelle est donnée par:

$$\boldsymbol{\mu \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\rho\beta(T - T_0) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \qquad 16$$

Solution analytique d'un écoulement de couche limite en régime laminaire sur une plaque plane en convection forcée :

A partir des corrélations expérimentales de transfert de chaleur par convection forcée, il a été trouvé que le nombre de Nusselt dépend des deux nombres adimensionnels, le nombre de Reynolds et celui de Prandtl tel que:

$$\boldsymbol{N_u = \emptyset(Re).\psi(Pr)} \qquad 17$$

Les relations fonctionnelles $\emptyset$(Re) et ψ(Pr), seront déterminés analytiquement. Premièrement, on doit considérer le cas de la couche limite laminaire qui est susceptible a des méthodes de solution exacte et approximative. Pour déterminer le coefficient d'échange de chaleur par convection (h) et le coefficient de frottement pour un écoulement incompressible sur une plaque plane, les équations de conservation (continuité, quantité de mouvement et d'énergie) doivent être satisfaisantes simultanément.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & 18 \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & 19 \\ u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & 20 \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations, on suppose la fonction du courant ψ(x, y) qui satisfera automatiquement l'équation de continuité, de telle sorte que:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \; et \; v = \; -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

En introduisant une nouvelle variable (h), telle que:

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_0}{v.x}}$$

On peut exprimer la fonction y(x, y) par:

$$\psi = \sqrt{v.xU_0}f(\eta)$$

Telle que (η), représente une fonction adimensionnelle de courant. Les composantes de vitesse deviennent:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = U_0.\dfrac{d[f(\eta)]}{d\eta} \\ v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v.U_0}{x}}.\left\{\dfrac{d[f(\eta)]}{d\eta}.\eta - f(\eta)\right\} \end{cases}$$

En exprimant $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$ en fonction de (η) et on les introduit dans l'équation de quantité de mouvement, on peut obtenir l'équation différentielle ordinaire non linéaire de 3^{eme} ordre suivante:

$$\boldsymbol{f(\eta) = \frac{d^2[f(\eta)]}{d\eta^2} + 2\frac{d^3[f(\eta)]}{d\eta^3} = 0} \qquad 21$$

Cette équation peut être résolue relativement aux trois conditions aux limites suivantes:

$$\begin{cases} \text{à } \eta = 0: f(\eta) = 0 \\ \text{à } \eta = 0: \dfrac{d[f(\eta)]}{d\eta} = 0 \\ \text{à } \eta = 1: \dfrac{d[f(\eta)]}{d\eta} = 1 \end{cases}$$

Soit (δ), l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique ou (u=99%U_0):

$$\boldsymbol{\delta = \frac{5.x}{\sqrt{Re_x}}} \qquad 22$$

Telle que; ($Re_x = \frac{\rho U_0 x}{\mu}$): le nombre local de Reynolds.

De la solution numérique de (61), $(u/U_0 = f(y/x\sqrt{Re_x}))$ la force de cisaillement a la paroi (y=0) peut être obtenue à partir du gradient de vitesse. Cette dernière, représente dans ce cas, la pente de la courbe $(u/U_0 = f(y/x\sqrt{Re_x}))$, elle est donnée par:

$$\left.\frac{\partial(u/U_0)}{\partial(y/x\sqrt{Re_x})}\right|_{y=0} = 0.332$$

Par conséquent, le gradient de vitesse en fonction de (x), est donne par:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.332\frac{U_0}{x}Re_x$$

La contrainte tangentielle par unité de surface est donnée dans ce cas par:

$$\boldsymbol{\tau_s = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.332\mu\frac{U_0}{x}Re_x} \qquad 23$$

En divisant les deux membres de l'équation (63) par (la vitesse de pression), le terme $(\frac{\rho U_\infty{}^2}{2})$, on peut obtenir le coefficient adimensionnel local de frottement:

$$\boldsymbol{C_{fx} = \frac{\tau_s}{\frac{\rho U_0{}^2}{2}} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}} \qquad 24$$

Le coefficient moyen de frottement est obtenu en intégrant l'équation (64) entre x=0 et x=L:

$$\boldsymbol{\overline{C_f} = \frac{1}{L}\int_0^L C_{fx}\,dx = 1.33\sqrt{\frac{\mu}{U_\infty \rho L}}} \qquad 25$$

Remarques

On peut obtenir des résultats significatifs en comparant les deux équations, celle d'énergie (60) et celle de la quantité de mouvement (59). En effet, u(x, y) est aussi une solution pour la distribution de la température T(x, y) si (v=a) et si la température de la plaque (T_s) est constante. Si on utilise la température de la surface (T_s) comme donnée de référence et en réécrivant la variable de gauche de (60) sous la forme de ($T-T_s$)/(T_0-T_s), ensuite, les conditions aux limites sont données par:

$$\begin{cases} \text{à } y = 0: \dfrac{T - T_s}{T_0 - T_s} = 0 \; et \; \dfrac{u}{U_0} = 0 \\ \text{à } y \to \infty: \dfrac{T - T_s}{T_0 - T_s} = 1 \; et \; \dfrac{u}{U_0} = 1 \end{cases}$$

T_0: est la température du courant libre (fluide environnant). La condition imposée (v=a) correspond à un nombre de Prandtl égal à l'unité depuis que ($[P_r = C_p\mu/k = v/\alpha]$).

- Pour (Pr=1), la distribution de la vitesse est similaire à celle de la température. Physiquement, le transfert de quantité de mouvement est analogue au transfert thermique lorsque (Pr=1). Les propriétés physiques de la majorité des gaz correspondent au nombre de Prandtl; Pr= (0,6÷1) donc, l'analogie est satisfaisante.
- Selon les calculs de Pohlhausen, la relation entre les épaisseurs des couches limite hydrodynamique et thermique est approximativement:$(\delta/\delta_{th} = P_r{}^{1/3})$.
- Pour une plaque plane de largeur (b) et de longueur (L):

1. Le taux total de transfert de chaleur est donne par:

$$q = 0{,}664R_{e_L}^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}b(T_0 - T_s)$$

2. Le coefficient local d'échange de chaleur par convection est donne par:

$$h_{cx} = 0{,}332\frac{k}{x}R_{e_L}^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}$$

3. Le nombre local de Nusselt est donne par:

$$Nu_x = 0{,}332R_{e_L}^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}$$

4. Le nombre moyen de Nusselt est donne par:

$$\overline{Nu_L} = 0{,}664R_{e_L}^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}}$$

Nombres adimensionnels

Le nombre de Nusselt

C'est un coefficient adimensionnel d'échange de chaleur, il représente le rapport du transfert de chaleur par convection à celui par conduction dans une couche de fluide d'épaisseur (L). La forme adimensionnelle appropriée de ce paramètre (h) est le nombre de Nusselt (Nu) défini par:

$$\boldsymbol{Nu = \frac{h_c.L}{k_f}} \qquad 26$$

A partir de la valeur locale de Nusselt, on peut premièrement, obtenir la valeur locale (hc) et ensuite, la valeur moyenne du coefficient du transfert de chaleur par convection (h| , , ,) et une valeur moyenne du nombre de Nusselt (.!´ , , , , ,).

$$\boldsymbol{\overline{Nu_L} = \frac{\overline{h_c}.L}{k_f} = f\left(R_{e_L}.Pr\right)} \qquad 27$$

Le nombre de Prandtl

Il représente le rapport de la diffusivité moléculaire due à la quantité de mouvement par la diffusivité thermique, il est donne par:

$$\boldsymbol{Pr = \frac{C_p\mu}{k} = \frac{v}{\alpha}} \qquad 28$$

Le nombre de Reynolds

Il représente le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses, il est donne par:

$$\boldsymbol{R_{e_L} = \frac{U_0.L}{v}} \qquad 29$$

Le nombre de Grashof

Il représente le rapport des forces de flottabilité aux forces de viscosité, il est donne par:

$$\boldsymbol{Gr_L = \frac{g.\beta(T_s - T_0).L^3}{v^2}} \qquad 30$$

Corrélations empiriques

Corrélations empiriques en convection libre

Les résultats expérimentaux relatifs au transfert de chaleur par convection naturelle, peuvent être corrèles par des expressions de type: $Nu = \emptyset(Gr).\psi(Pr) = C.(Gr.Pr)^m$ A titre d'exemples, on peut citer:

1. Plaques et cylindres verticales:

$$-pour\ 10^4 < (Gr.Pr) < 10^9 \Rightarrow\ Nu = 0{,}59.(Gr.Pr)^{0{,}25}$$
$$-pour\ 10^9 < (Gr.Pr) < 10^{13} \Rightarrow\ Nu = 0{,}021.(Gr.Pr)^{0{,}40}$$

2. Cylindres horizontaux:

$$-pour\ 10^{-2} < (Gr.Pr) < 10^2 \Rightarrow\ Nu = 1{,}02.(Gr.Pr)^{0{,}148}$$
$$-pour\ 10^2 < (Gr.Pr) < 10^4 \Rightarrow\ Nu = 0{,}85.(Gr.Pr)^{0{,}188}$$

3. Sphères de diamètre (D):

$$-pour\ 1 < Gr < 10^5 \Rightarrow\ \overline{Nu_D} = 2 + 0{,}392.(Gr_D)^{0{,}25}$$

Corrélations empiriques en convection forcée

1. Ecoulement sur un plan

- Ecoulement turbulent:

$$\overline{Nu_L} = 0{,}035R_{e_L}^{0{,}8}Pr^{\frac{1}{3}}, pour\ Re > 5.10^5\ et\ Pr \geq 0{,}5$$

- Ecoulement laminaire:

$$\overline{Nu_L} = 0{,}628R_{e_L}^{0{,}5}Pr^{\frac{1}{3}}, pour\ Re < 5.10^5\ et\ 0{,}5 \leq Pr \leq 10$$

2. Conduits et tubes

$$\overline{Nu_D} = 0{,}023R_{e_L}^{0{,}8}Pr^n, pour\ 6000 < Re < 10^7\ , 0{,}5 \leq Pr \leq 120\ et\ (L/D) > 60$$

(n=0.4 en cas de chauffage et n=0.3 en cas de refroidissement).

4. Conduits non circulaire

$$\overline{Nu_{DH}} = \overline{Nu_C}[1 + \{0{,}8.(D_i/D_0\ )^{-0{,}16}\}^{15}]^{\frac{1}{15}}$$