Critères de convergences

Critère de Comparaison On suppose $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$.

- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ CV$\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ CV.
- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ DV$\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} v_n$ DV.

Exemple 4.1.4 *Soit la série* $\sum_{n\geqslant 0}\sin(\frac{1}{3^n})$. *On a :* $0 \leqslant \sin(\frac{1}{3^n}) \leqslant \frac{1}{3^n}$. *Comme* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3^n}$ *est une série géométrique convergente, donc la série* $\sum_{n\geqslant 0}\sin(\frac{1}{3^n})$ *est convergente.*

Critère d'équivalence Soient $\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n\right)$ et $\left(\sum_{n\geqslant 0} v_n\right)$ à termes strictement positifs. On suppose que : $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = l$ ($l \neq 0$ et $l \neq +\infty$). Alors les deux séries sont de même nature.

Exemple 4.1.5 *Soient les séries* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$, *où* $u_n = \ln(1+\frac{1}{2^n})$ *et* $v_n = \frac{1}{2^n}$. *On a* $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{2^n})}{\frac{1}{2^n}} = 1$, *donc la série* $\sum_{n\geqslant 0}\ln(1+\frac{1}{2^n})$ *est convergente, car la série* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$ *est convergente (série géométrique avec* $|q| = \frac{1}{2} < 1$).

Proposition 4.1.1 ***Critère de D'Alembert.*** *On suppose* $u_n > 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

- *Si* $l < 1$, *la série converge.*
- *Si* $l > 1$, *la série diverge.*
- *Si* $l = 1$, *on ne peut rien dire.*

Exemple 4.1.6 *Soit la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n!}$. *On a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$. *Comme* $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ *et* $0 < 1$, *donc, la série converge.*

Proposition 4.1.2 ***Critère de Cauchy.*** *On suppose* $u_n \geqslant 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$.

- *Si* $l < 1$, *la série converge.*
- *Si* $l > 1$, *la série diverge.*
- *Si* $l = 1$, *on ne peut rien dire.*

Exemple 4.1.7 *Soit la série de terme général* $u_n = (\frac{1}{2}+\frac{1}{n!})^n$. *On a* $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{(\frac{1}{2}+\frac{1}{n!})^n} = (\frac{1}{2}+\frac{1}{n!})$. *Comme* $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n!}) = \frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{2} < 1$, *donc, la série converge.*