

# **Module : Techniques et pratiques de statistique en Démographie**

**Etudiants : 2<sup>ème</sup> Année licence ( S4)**

**Assuré par : Mme HACHEM Amel**

**Département : Démographie**

**Faculté : Sciences Sociales**

## **Suite : Cours 6**

**Application des lois de probabilité dans le cas d'une variable aléatoire discrète**

### **1- La loi Binomiale :**

Lorsque les éventualités se réduisent à une alternative ( succès ou échec), la variable aléatoire « nombre de succès » suit une loi de probabilité appelée **Loi Binomiale**.

Soit **p** la probabilité d'un événement A donc **q = 1 – P** qui est la probabilité de l'événement contraire  $\bar{A}$ .

La probabilité de réaliser x fois , au cours de n épreuves identiques l'événement A est :

$$p(x) = C_n^x * P^x * q^{n-x}$$

où :

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad \text{sachant que } n \geq x$$

Et n est le nombre des épreuves , taille de l'échantillon.

P est la probabilité élémentaire avec  $P + q = 1$

$$n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) \dots * 1.$$

$$\text{Exe : } 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1.$$

On lit 5 factoriel , il est donné par les calculatrices

### **Les paramètres de la loi Binomiale :**

Chaque loi a deux paramètres qui sont : l'espérance mathématique ( $E_x$ ) et la variance ( $V_x$ ).

$$\text{Pour la loi Binomiale : } E_x = n * P$$

$$\text{Et } V_x = n * P * q \quad \text{sachant que } \delta_x = \sqrt{V_x}$$

Cette loi est tabulée ( elle a une table )

### Exemples d'application :

Exe 1 : Déterminer la loi de probabilité du nombre de garçons dans une famille de 4 enfants.

La variable « nombre de garçons » est une variable aléatoire discrète donc on peut lui appliqué la loi Binomiale . On a :

$$n = 4 \quad , \quad P = 1/2 = 0,5 \quad , \quad q = 1-P = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$p_{(x)} = C_n^x * P^x * q^{n-x}$$

x peut prendre les valeurs suivantes : 0 , 1, 2, 3 ou 4

$$p_{(x=0)} = C_4^0 * P^0 * q^{4-0} = 1/16 = 0,062$$

$$p_{(x=1)} = C_4^1 * P^1 * q^{4-1} = 4/16 = 0,25$$

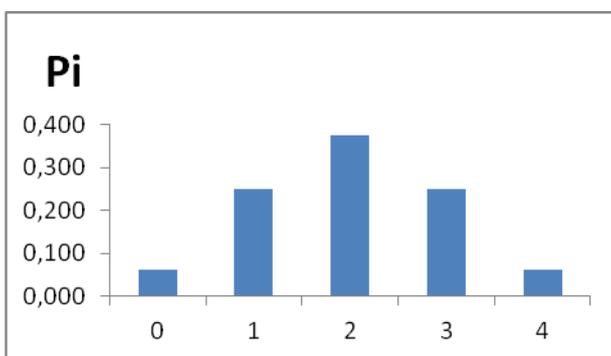
$$p_{(x=2)} = C_4^2 * P^2 * q^{4-2} = 6/16 = 0,375$$

$$p_{(x=3)} = C_4^3 * P^3 * q^{4-3} = 4/16 = 0,25$$

$$p_{(x=4)} = C_4^4 * P^4 * q^{4-4} = 1/16 = 0,062$$

Donc la loi de probabilité est :

xi	0	1	2	3	4	$\Sigma$
Pi	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	1



**EXE 2 :** Quelle est la probabilité d'avoir 3 garçons dans une famille de 10 enfants ?

Cette variable est discète ( discontinue) . Elle a que deux éventualités :  
avoir un garçon ou avoir une fille .

Elle suit une loi Binomiale de paramètres :

$$N= 10 \quad , \quad P= 0,5 \quad q= 1- 0,5 = 0,5 \quad , \quad x=3$$

$$P_{(x=3)} = C_n^x * P^x * q^{n-x} = C_{10}^3 * 0,5^3 * 0,5^{10-3} = \\ \frac{10!}{3!(10-3)!} * 0,5^3 * 0,5^7 = 0,117$$

Exe 3 : une intoxication répartie au hasard affecte 10% de l'ensemble des habitants d'une ville .

On considère l'ensemble des familles de 5 personnes .

Quelle est la probabilité :

- 1- que les 5 membres de la famille soient malades ?
- 2- que 4 des 5 membres de la famille soient malades ?
- 3- Qu'il y ait au moins 3 malades dans la famille ?
- 4- Quelles sont l'espérance mathématique et la variance de cette variable ?

$$\text{On a } P = 10\% = 0,1 \quad \text{donc } q=1-P = 1-0,1 =0,9$$

$$n= 5$$

$$1- x=5 \quad \text{donc } p_{(x=5)} = C_5^5 * P^5 * q^{5-5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} * 0,1^5 * 0,9^0 = 0,1^5$$

$$2- x=4 \quad \text{donc } p_{(x=4)} = C_5^4 * P^4 * q^{5-4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} * 0,1^4 * 0,9^1$$

- 3- Qu'il y ait au moins 3 malades parmi 5 membres cela veut dire soit 3 ou 4 ou 5 donc x peut prendre la valeur de 3 ou de 4 ou 5

Donc on doit calculer  $p_{(x=3)}$  ,  $p_{(x=4)}$  et  $p_{(x=5)}$  puis pour avoir la probabilité d'avoir au moins 3 malades serait égale à :

$$P_{(\text{au moins } 3)} = p_{(x=3)} \text{ ou } p_{(x=4)} \text{ ou } p_{(x=5)}$$

Et on sait très bien que ou est remplacé par l'addition + On aura :

$$P_{(\text{au moins } 3)} = p_{(x=3)} + p_{(x=4)} + p_{(x=5)}$$

On a déjà calculé  $p_{(x=4)}$  et  $p_{(x=5)}$

$$P_{(x=3)} = C_5^3 * P^3 * q^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} * 0,1^3 * 0,9^2 = 10 * 0,1^3 * 0,9^2$$

$$4- E(x) = n * P = 5 * 0,1 = 0,5$$

$$V(x) = n * P * q = 5 * 0,1 * 0,9 = 0,45$$