جامعة وهران 2 محمد بن أحمد
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير

السنة الأولى ليسانس
مادة الإحصاء 2 **مارس 2020**

الفصل الثاني

الانحدار و الارتباط

إن التوزيعات التكرارية التي تمت دراستها حتى الآن تتعلق بمعطيات تخص متغير واحد كقيمة مشتركة لجميع عناصر المجتمع (أجور العمال، أطوال الطلبة، نقاط في مادة ما...).

وغالبا ما يحدث في الواقع أن تتعلق بيانات مجموعة إحصائية بعدة صفات في آن واحد. لهذا سوف نشرع في هذا الفصل بدراسة بعض الأمور التي تتعلق بمتغيرين في آن واحد (كالوزن و للقامة لمجموعة من الطلبة، رقم الأعمال و عدد العمال لمؤسسة ما، حجم المبيعات و التكاليف...).

إذن هذا الفصل يحتوي أساسا على مدخل في الانحدار الخطي البسيط و الارتباط الخطي البسيط. ويتضمن على الأدوات الضرورية لدراسة العلاقة الموجودة بين متغيرين يكون أحدهما تابع و الآخر مستقل.

1- الانحدار الخطي البسيط: Régression linéaire simple

تقتصر دراسة الانحدار الخطي البسيط على العلاقة الخطية بين متغيرين فقط. إن كلمة خطي تعني أن نسبة الزيادة في المتغير المستقل تساوي بالتقريب نسبة الزيادة في المتغير التابع، بمعنى أن سحابة النقاط الممثلة للقيم الحقيقية للمتغيرين تتبع خط مستقيم بالتقريب.

لدراسة العلاقة الموجودة بين متغيرين نمر بالمراحل التالية :

أ. تحديد المتغير التابع المدروس : و لهذا يجب وصف وتحديد المتغيرين بدقة وهذا باستعمال الإحصائيات الموجودة لدينا حتى نصل إلى تحديد المتغير الأكثر تأثيرا (المستقل).

ب. تحديد نوع العلاقة الموجودة بين المتغيرين : أي تحديد اتجاه المتغيرين. هذا الاتجاه يمكن أن يكون طردي (نفس الاتجاه) أو عكسي (اتجاه معاكس).

ج. وضع النموذج الرياضي للظاهرة الإحصائية وهذا بعد ما يتم تشكيل الكوكبة أو سحابة النقاط الممثلة للقيم (x,y).
هذه السحابة يمكن أن تأخذ عدة أشكال : خطية، أسية، لوغاريثمية...أي شكل يمكن صياغته على شكل نموذج رياضي.

كما قلنا في هذا الفصل نكتفي ب**الشكل المستقيم** من النقاط و الذي يقع بالتقريب على استقامة واحدة. ففي هذه الحالة نلاحظ أن الشكل الرياضي المناسب هو الخط المستقيم.
لوضع هذا المستقيم لابد من توفير شرطان أساسيان :

1) يجب أولا أن يمر هذا المستقيم على النقطة المركزية $(\bar{x},\bar{y})$.
2) يجب أن تكون المسافات التي تفصل بين نقاط الكوكبة و نقاط خط المستقيم **أقل ما يمكن Min**.

التعديل الخطي : Ajustement linéaire

ليكن : $(x_1, x_2,x_3,\ldots, x_n)$
$(y_1, y_2,y_3,\ldots, y_n)$

إذا كان المتغير المستقل (x_i) و المتغير التابع (y_i) يمكن توفيق مستقيم على الكوكبة بالمعادلة التالية :

$$D : y/x \qquad y_i = ax_i + b$$

هذا المستقيم يسمى بمستقيم الانحدار أو مستقيم التقدير. تمكننا هذه المعادلة من تقدير قيمة y عندما تكون قيمة x معلومة. و يمثل الثابت أو المعامل a ميل خط الانحدار أو معامل الانحدار أما المعامل b فيشكل مقدار ثابت.

يتم تحديد القيمتين a و b باستعمال **طريقة المربعات الصغرى.**

طريقة المربعات الصغرى : Méthode des Moindres carrés

تتمثل هذه الطريقة في جعل الفروق بين نقاط الكوكبة و نقاط المستقيم **أقل ما يمكن Min** حتى تتطابق مع هذا الخط. و يمكن كتابة هذه العلاقة كما يلي : y_i

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i')^2 = \sum Min$$

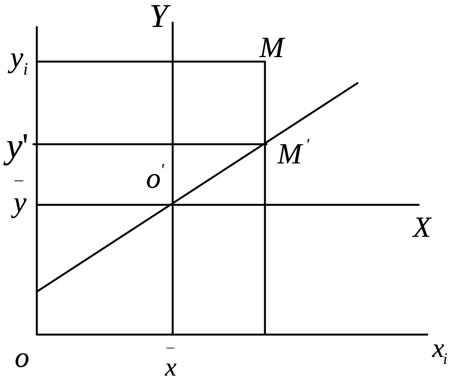
في هذه الطريقة يتعين علينا إيجاد معادلة حسابية تجمع النقاط الغير المنتظمة. نقترض معادلة نظرية ثم نحاول تقريب النقاط غير المنتظمة من التمثيل البياني الذي يمثل المعادلة النظرية التي تم افتراضها[1].

[1] -المعادلة التي نفترضها يجب أن تكون قريبة من الاتجاه العام الذي تأخذه مجموعة النقاط.

فيما يتعلق بالمثال الذي أخذناه فإننا نفترض أن المعادلة النظرية خطية و ذلك لأن الاتجاه العام للعلاقة الموجودة بين الظاهرتين المدروستين خطي.

البحث عن هذه المعادلة الخطية يتم بطريقة المربعات الصغرى. و تتمثل في رسم مستقيم نظري نفترض أنه يمر بأكبر عدد من النقاط و من ثم تقليل المسافة أو الانحراف الذي يفصل النقاط المتباعدة عن المستقيم النظري بهدف تقريبها منه.

نستعمل الرسم البياني الموالي لنوضح ذلك:



المعادلة النظرية التي رسمناها هي معادلة خطية:

$$D : y/x \quad y_i = ax_i + b$$

في المرحلة الثانية يجب أن نقلل من المسافة التي تفصل نقاط الكوكبة البعيدة عن المستقيم. نأخذ النقطة M كمثال ثم نعمم على باقي النقاط.

بالنسبة للنقطة M فأن الانحراف الذي نريد تقليصه يساوي قيمة (ع) النقطة M ناقص قيمة (ع) الخاصة بإسقاط النقطة M على المستقيم أي MM' و هو القيمة: $y_i - y'$
قيمة (ع) النقطة M المنحرفة عن المستقيم نرمز لها بالحرف y_i أما (ع) النقطة M' فنرمز لها بالحرف y' و هي القيمة النظرية الموجودة على المستقيم، ونكتبها $y' = ax_i + b$ لأنها موجودة على المستقيم النظري. يكون انحراف MM' يساوي:

$$y_i - y' = y_i - ax_i - b$$

نأخذ مجموع انحرافات كل النقاط غير الموجودة على المستقيم بالنسبة لإسقاطاتها. يكون لدينا:

$$\sum(y_i - y') = \sum(y_i - ax_i - b)$$

ثم نأخذ مربع هذه الانحرافات[2] و نكتب:

$$\sum(y_i - ax_i - b)^2$$

[2] - لأن مجموع مربع الانحرافات يكون أقل مما يمكن Min.

و نبحث عن :

$$Min\sum(y_i - ax_i - b)^2$$

لكي نتخلص من الثابت b نلجأ إلى تغيير المعلم $x0y$ بالمعلم $X0'Y$ الذي يمر بالضرورة بالوسطين الحسابيين $\bar{x}$ و $\bar{y}$ و يصبح لدينا المتغيرات:

$$\begin{cases} X_i = x_i - \bar{x} \\ Y_i = y_i - \bar{y} \end{cases}$$

فإذا أردنا البحث عن $Min\sum(y_i - ax_i - b)^2$ بالنسبة للمعلم $X0'Y$ يكون لدينا:

$$y_i - y' = y_i - Y_i$$

مع العلم أن $Y_i = ax_i$ و نكتب:

$$Min\sum(y_i - ax_i - b)^2 = Min\sum(Y_i - aX_i)^2$$
$$= Min\sum(Y_i^2 - 2aY_iX_i + a^2X_i^2)$$

لكي تكون هذه القيمة Min أي اقل ما يمكن يجب أن تكون المشتقة الأولى بالنسبة لـ a [3] تساوي الصفر و يكون لدينا:

$$\frac{\delta Q}{\delta a} = 0$$

$$\sum(-2X_iY_i - 2aX_i^2) = 0$$

و منه:

$$a = \frac{\sum X_iY_i}{\sum X_i^2}$$

نعوض X_i و Y_i بقيمتيهما فنحصل على :

a يسمى معامل الانحدار أو معمل التقدير (الميل).

علاقة التعريف (1)

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

أما الثابت b يحسب كما يلي :

$$y_i = ax_i + b$$
$$\Rightarrow \sum y_i = \sum(ax_i + b)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b = a\sum_{i=1}^{n} X_i + nb$$

---

[3] - نشتق بالنسبة لـ a لأنه هو المتغير أما القيم X_i و Y_i فإنها معلومة من الجدول.

نقسم الطرفين على n :

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = a.\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} x_i + \frac{nb}{n}$$

ثم نستنتج قيمة الثابت b:

$$\Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$$

هذا القانون الذي برهنا عنه يسمى **القانون المباشر أو علاقة التعريف.**

القانون المنشور أوعلاقة كونينغ Koning :

هذا القانون سنبرهن عليه انطلاقا من القانون المباشر لدينا:

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

نقوم بنشر البسط:

$$\begin{aligned}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum(x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x}\bar{y}) \\ &= \sum x_i y_i - \bar{y}\sum x_i - \bar{x}\sum y_i + n\bar{x}\bar{y} \\ &= \sum x_i y_i - n\bar{y}\bar{x} - n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y} \\ &= \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\end{aligned}$$

ثم نقوم بنشر المقام:

$$\begin{aligned}\sum(x_i - \bar{x})^2 &= \sum(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + n\bar{x}^2 \\ &= \sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \\ &= \sum x_i^2 - n\bar{x}^2\end{aligned}$$

ومنه يصبح لدينا: **القانون المنشور أوعلاقة Koning (2) و (3)**

$$a = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad (2)$$

إذا قسمنا البسط و المقام على n نحصل على :

$$a = \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \frac{n\bar{x}\bar{y}}{n}}{\frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{n\bar{x}^2}{n}}$$

$$a = \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}.\bar{y}}{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$a = \frac{Cov(x,y)}{V(x)} = \frac{Cov(x,y)}{\delta_x^2} \quad (3)$$

Cov(x,y) = التباين المشترك بين x و y.

$V(x) = \delta_x^2$ = تباين x.

لحساب معادلة الانحدار لما يكون (y_i) هو المتغير المستقل و (x_i) المتغير التابع نستخدم كذلك طريقة المربعات الصغرى معالم النموذج لتحديد :

D : x/y $\quad x_i = a' y_i + b'$

علاقة التعريف (1)

$$a' = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \quad (1)$$

ومنه يصبح لدينا: **القانون المنشور أو علاقة كونينغ (2) و (3)**

$$a' = \frac{\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sum y_i^2 - N\bar{y}^2} \quad (2)$$

$$a' = \frac{Cov(x,y)}{V(y)} = \frac{Cov(x,y)}{\delta_y^2} \quad (3)$$

Cov(x,y) = التباين المشترك بين x و y.

$V(Y) = \delta_Y^2$ = تباين y.

ثم نستنتج قيمة الثابت b':

$$\Rightarrow b' = \bar{x} - a\bar{y}$$

تنبيه : للحساب يجب استخدام القانون الأكثر فائدة من وجهة نظر في الحسابات و من الأفضل استخدام القانون المنشور (3). و كل شيء يتعلق بالمعطيات التي تكون لدينا في البداية.

<u>مثال رقم 1</u> :

لدينا المتغيرين **x** و **y** : حيث أن **x** يمثل الدخل الشهري و **y** يمثل النفقات الشهرية بمليون سنتيم ل **6** أسر حسب الجدول التالي:

54	15	12	09	07	06	05	**Xi**
42	12	08	07	06	05	04	**y_i**

المطلوب :

1- أوجد معادلة انحدار النفقات على الدخل Y/X (باستخدام علاقة التعريف).
2- قدر النفقات إذا كان الدخل يساوي 20 مليون سنتيم.
3- أوجد معادلة انحدار الدخل على النفقات X/Y (باستخدام علاقة التعريف). .
4- قدر الدخل إذا كانت النفقات تساوي 35 مليون سنتيم.
5- حساب التباين المشترك بين x وy. فسرالنتيجة.

الحل :

حساب المتوسطان الحسابيان ل x و y :

$$\bar{x} = \frac{54}{6} = 9 \qquad \bar{y} = \frac{42}{6} = 7$$

$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})$	y_i	x_i
9	12	-3	16	-4	04	05
4	6	-2	9	-3	05	06
1	2	-1	4	-2	06	07
0	0	0	0	0	07	09
1	3	1	9	3	08	12
25	30	5	36	6	12	15
40	**+ 53**		**74**		**42**	**54**

1- **معادلة انحدار النفقات على الدخل** Y/X **:** (باستخدام علاقة التعريف).

D : y/x $\quad y_i = ax_i + b$

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{+53}{74} = +0{,}716$$

$$b = \bar{y} - a\,\bar{x} = 7 - (0{,}716 \times 9) = 0{,}556$$

و تكون المعادلة التي نبحث عنها هي:

$$y_i = 0{,}716 x_i + 0{,}556$$

و تعبر عن العلاقة النظرية الموجودة بين الظاهرتين X و Y.

العلاقة التي وجدناها هي دالة $y = f(x)$ أي أن الظاهرة Y تتغير بدلالة الظاهرة Y و تعبر عن العلاقة عن الانحدار Y/X.

2- تقدير النفقات إذا كان الدخل يساوي 20 مليون سنتيم :

إذا كان $x = 20 \Rightarrow y = 0{,}716(20) + 0{,}556 = 14{,}876 \approx 15$

3- معادلة انحدار الدخل على النفقات X/Y : (باستخدام علاقة التعريف).

$$D : x/y \quad x_i = a' y_i + b'$$

يمكن أن نريد معرفة الانحدار X/Y الذي يعبر عن تغيير الظاهرة Y بدلالة الظاهرة X ، فيجب أن نبحث عن دالة $x = f(y)$.

نستعمل نفس الطريقة و نجد في هذه الحالة أن الميل هو:

$$a' = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = \frac{+53}{40} = +1{,}325$$

$$b' = \bar{x} - a'\bar{y} = 9 - (1{,}325 \times 7) = -0{,}275$$

و تكون المعادلة التي نبحث عنها هي:

$$x_i = 1{,}325 y_i - 0{,}275$$

4- تقدير الدخل إذا كانت النفقات تساوي 35 مليون سنتيم :

إذا كان $yi = 35 \Rightarrow x = 1{,}325(35) - 0{,}275 = 46{,}1 \approx 46$

5- حساب التباين المشترك بين x وy. مع تفسيرالنتيجة :

$$Cov(x, y) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{+53}{6} = +8{,}833$$

التفسير : $Cov(x,y) \rangle 0$ موجب $\Leftarrow$ علاقة طردية معنى ذلك أن المتغيران x وy يتغيران في نفس الاتجاه.

2- **الارتباط الخطي: Coefficient de coorélation**

لدراسة الارتباط نستعين بالانحدار. نبحث عن انحدار الظاهرة Y بالنسبة للظاهرة X و عن انحدار الظاهرة X بالنسبة للظاهرة Y.

بما أن كل ظاهرة تتغير بدلالة الأخرى فإن هذا يؤدي ألا وجود ارتباط بين الظاهرتين.

رأينا أن:

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

و أن:

$$a^{'} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}$$

نحصل على معامل الارتباط بالعلاقة التالية:

$$r = \sqrt{a.a^{'}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

بمعنى أن:

$$r^2 = a.a^{'}$$

لنبرهن على هذا نفترض $b = b^{'} = 0$

نكتب إذا:

$$y = ax \quad (1)$$

$$x = a^{'}y \quad (2)$$

نعوض (2) في (1) نجد أن $a.a^{'} = 1$ أي $r^2 = 1$

و يكون معامل الارتباط r محصورا بين $+1$ و -1 .

-إذا كان معامل الارتباط قريبا من $|1|$ فإن الارتباط يكون قويا.

-إذا كان معامل الارتباط قريبا من 0 فإن الارتباط يكون ضعيفا.

أما عن إشارة معامل الارتباط فإنها تدلنا عن الاتجاه. فإذا كانت الظاهرتان تتغيران في نفس الاتجاه هذا معناه أن الإشارة موجبة و يكون الارتباط طردي ؛ أما إذا كانت الظاهرتان تتغيران في اتجاه عكسي تكون الإشارة سالبة و يكون الارتباط عكسي.

في العلاقة

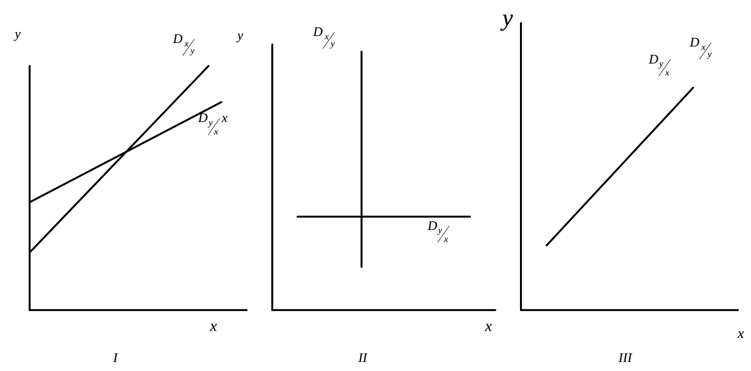
$$r=\sqrt{a.a^{'}}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})^2}}$$

يكون المقام دائما موجبا، و الذي يحدد إشارة r هو البسط إذا.
بيانيا نحصل على مستقيمين قد يتقاطعان و قد يتطابقان.

-إذا كان المستقيمان متعامدان يكون(الشكل II) لدينا $a.a^{'}=0$ و معناه أنه لا يوجد ارتباط بين الظاهرتين لأن اتجاه المستقيم $y=f(x)$ ليس له أي علاقة باتجاه المستقيم $x=f(y)$.

-إذا كان المستقيمان متطابقان (الشكل III) يكون $aa'=1$.

بشكل عام كلما كان المستقيمان متقاربين كلما كان الارتباط قويا (الشكل).



نرجع إلى المثال السابق و نحسب معامل الارتباط :

$$r=\sqrt{a.a^{'}}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{+53}{\sqrt{74\times40}}=+0,974$$

و بعبارة أخرى:

$$r=\sqrt{aa^{'}}=\sqrt{0,716\times1,325}=\pm0,974$$

فالارتباط إذن قوي. لتحديد إشارة معامل الارتباط يجب أن نلاحظ اتجاه تغيير الظاهرتين. يأخذ إشارة الميل a و a'.

عندما نحسب معامل الارتباط لا يجب ألا نكتفي بالنتيجة و إنما يجب أن نبحث عن التفسير المنطقي للنتيجة التي وجدناها.

لذا يجب التمعن جيدا في تفسير معامل الارتباط، و التأكد من أن الظواهر المدروسة بينها علاقات سببية فعلا.

زيادة على هذا يجب أن نفرق بين الارتباط كشيء ممكن (يزيد الطول مع الوزن بشكل عام أو في أغلب الحالات) و بين القوانين الفيزيائية مثلا (يزيد تمدد المعدن مع زيادة الحرارة). القانون الثاني برهان علمي صالح لكل زمان و مكان، و العلاقة بين تمدد المعادن و زيادة الحرارة لا تعبر عن ارتباط لأنها قانون علمي. ما قد نسميه ارتباطا في هذه الحالة يساوي 1 لأننا نكون متأكدين من وجود العلاقة كاملة. إنما يكون الارتباط بين الظواهر التي لا تخضع للقوانين العلمية.

3- **معامل التحديد :** Coefficient de détermination

هو مربع معامل الارتباط :

$$r^2_{x,y} = a.a'$$

معامل التحديد مقياس يبين أو يقيس مدى تأثير المتغير المستقل (x_i) على المتغير التابع (y_i).

ملاحظة : $0 \leq r^2_{x,y} \leq 1$

نرجع إلى المثال السابق و نحسب معامل التحديد :

$$r^2_{x,y} = (0,974)^2 = 0,948 \times 100 = 94,8\%$$

التفسير :

يمكن القول إن تغيرات الإنفاق (y_i) ترجع بنسبة 94,8% إلى تغيرات الدخل (x_i) أما النسبة الباقية و هي (100- 94.8 = 5,2%) ترجع إلى عوامل أخرى غير مدرجة في المعادلة (نجهلها).

<u>مثال رقم 2</u> :

لتكن السلسلة الإحصائية التالية التي تمثل نفقات (تكاليف) البحث (X) و الربح (Y):

نفقات البحث X	40	42	26	45	60
الربح Y	50	60	40	50	80

المطلوب:

1- أوجد معادلة مستقيم الانحدار Yعلى X ثم معادلة مستقيم الانحدار Xعلى Y.

2- أحسب معامل الارتباط الخطي بين X و Y. فسر النتيجة.

3 - إذا افترضنا أن الظاهرة تتبع نفس التطور في المستقبل، حدد قيمة الربح لما تكون قيمة نفقات البحث تساوي **80**.

الحل:

نفقات البحث Xi	الربح Yi	Xiyi	x_i^2	y_i^2
40	50	2000	1600	2500
42	60	2520	1764	3600
26	40	1040	676	1600
45	50	2250	2025	2500
60	80	4800	3600	6400
213	280	12610	9665	16600

1

: معادلة مستقيم الانحدار Y على X: $Y_i = a x_i + b$

نحدد قيمة الثابتين a و b :

$$a = \frac{\mathrm{cov}_{xy}}{\delta_x^2}.$$

$$\mathrm{cov}_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \overline{x}\,\overline{y}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum Xi}{N} = \frac{213}{5} \Rightarrow \boxed{\overline{x} = 42,6}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{280}{5} \Rightarrow \boxed{\overline{y} = 56}$$

$$\mathrm{cov}_{xy} = \frac{12610}{5} - 42,6 \times 56 \Rightarrow \boxed{\mathrm{cov}_{xy} = 136,4}$$

$$\delta_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{9665}{5} - (42,6)^2 \Rightarrow \boxed{\delta_x^2 = 118,24}$$

$$a = \frac{136,4}{118,24} = 1,153 \Rightarrow \boxed{a = 1,153}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x} = 56 - (1,153 \times 42,6) \Rightarrow \boxed{b = 6,88}$$

معادلة مستقيم الانحدار Y على X: $\boxed{y_i = 1,153 x_i + 6,88}$

معادلة مستقيم الانحدار X على Y:

$$x_i = a'y_i + b'$$

نحدد قيمة الثابتين **a’ و b’** :

$$a' = \frac{\mathrm{cov}_{xy}}{\delta_y^2}.$$

$$\delta_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{16600}{5} - (56)^2 \Rightarrow \boxed{\delta_y^2 = 184}$$

$$a' = \frac{136,4}{184} = 1,153 \Rightarrow \boxed{a = 0,741}$$

$$b' = \bar{x} - a'\bar{y} = 42,6 - (0,741 \times 56) \Rightarrow \boxed{b' = 1,104}$$

معادلة مستقيم الانحدار X على Y:

$$\boxed{x_i = 0,741 y_i + 1,104}$$

2- معامل الارتباط الخطي بين X و Y: (r_{xy})

$$r_{xy} = \frac{\mathrm{cov}_{xy}}{\delta_x \delta_y} = \frac{136,4}{\sqrt{118,24}\sqrt{184}} \Rightarrow \boxed{r_{xy} = 0,924}$$

العلاقة بين نفقات البحث والربح طردية وقوية جدا قريبة من التطابق

3- تحديد قيمة الربح:

$$\boxed{y_i = 1,153 x_i + 6,88}$$

$$x = 80$$

$$y = (1,153 \times 80) + 6,88 \Rightarrow \boxed{y = 99,12}$$

أستاذة المادة :

- **شنوف ص.**
- **سليماني ر.**
- **قنصاب ح. م.**
- **كيحل م.ر.**