3.3.5 Généralités sur les EDPs

Définition 3.3.1 *On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP.*

Exemple 3.3.5 $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 1^{er} *ordre.*

Définition 3.3.2 *Si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et "à la puissance 1" dans l'EDP, celle-ci est dite linéaire.*

Exemple 3.3.6 $u = u(x, y)$

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 1^{er} *ordre linéaire.*
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0$, 1^{er} *ordre non-linéaire.*
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $2^{ème}$ *ordre linéaire.*
- $\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$, $2^{ème}$ *ordre non-linéaire.*

EDP linéaires du 1^{er} ordre

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = D(x,y),$$

est la forme la plus générale pour une EDP $\begin{cases} \text{linéaire} \\ 1^{er} \text{ ordre} \end{cases}$.

Exemple 3.3.7 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 1^{er} *ordre linéaire.*

EDPs linéaires du $2^{ème}$ ordre

Si u est une fonction de deux variables, alors une EDP linéaire du $2^{ème}$ ordre est une équation de la forme suivante :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial u}{\partial y \partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0,$$

et A, B, C, D, E, F et G sont des fonctions de x et de y qui ne s'annulent pas simultanément. Nous supposerons aussi que u, A, B, C, D, E, F et G ont toutes au moins des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur un domaine D du plan x, y.

- $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$, une EDP du $2^{ème}$ ordre linéaire à coéfficients constants..
- $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, une EDP du $2^{ème}$ ordre linéaire à coéfficients variables.