LES ANNUITES

1. Définitions et caractéristiques

On appelle annuités une suite de versements perçus ou réglés à intervalles de temps réguliers.

Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme « annuité » par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».

Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période. Les versements effectués ont pour but :

- constituer un capital, il s'agit d'annuités de placement (versement en début de période) ou de capitalisation (versements en fin de période) ;
- rembourser une dette, c'est le cas des annuités de remboursements ou d'amortissements.

L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre de flux et le montant de chaque flux.

Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables.

Les annuités peuvent être certaines lorsque leur nombre est connu à l'avance, aléatoires ou viagères, lorsque leur nombre est inconnu au moment du contrat ou enfin perpétuelles lorsque leur nombre est illimité.

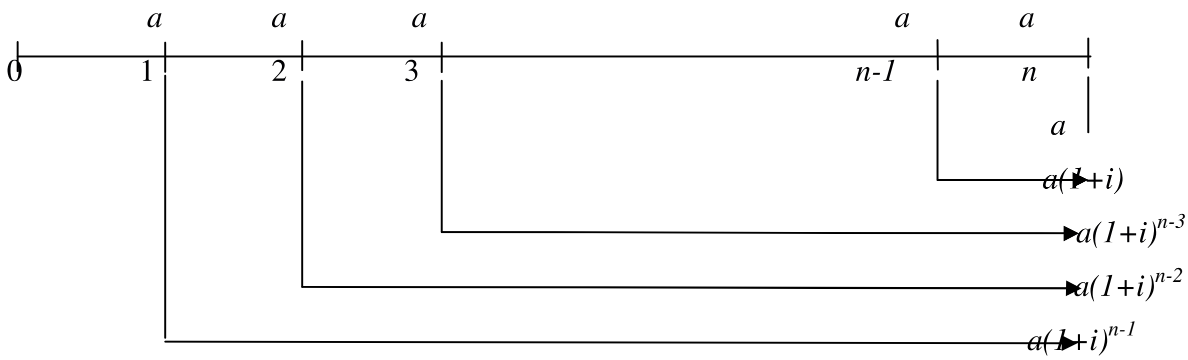
2. Les annuités constantes

La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement c'est à dire début de période ou fin de période.

2.1. La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de capitalisation

La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de fin de période désigne la somme des valeurs acquises par chacune de ces annuités, exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.

Désignons par :
a : le montant constant de l'annuité ;
n : le nombre d'annuités (de périodes) ;
i : le taux d'intérêt ;
V_n : la valeur acquise par la suite d'annuités au terme de la dernière ;



On a alors:

$$V_n = a + a\,(1+i) + a\,(1+i)^2 + \ldots.. + a\,(1+i)^{n-3} + a\,(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = a\,[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Le terme $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ est fourni par la table financière n°3.

<u>Exemple :</u>

Une personne place 5.000 U/M chaque année pendant 8 ans. Ces versements sont capitalisés au taux de 7%. Déterminer le capital constitué au terme du dernier versement.

$$V_8 = 5.000\frac{(1{,}07)^8 - 1}{0{,}07}$$

$$V_8 = 51.299{,}01\ UM$$

2.2. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de capitalisation

La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période est la somme des annuités actualisées exprimée à la date d'origine (une période avant le premier versement).

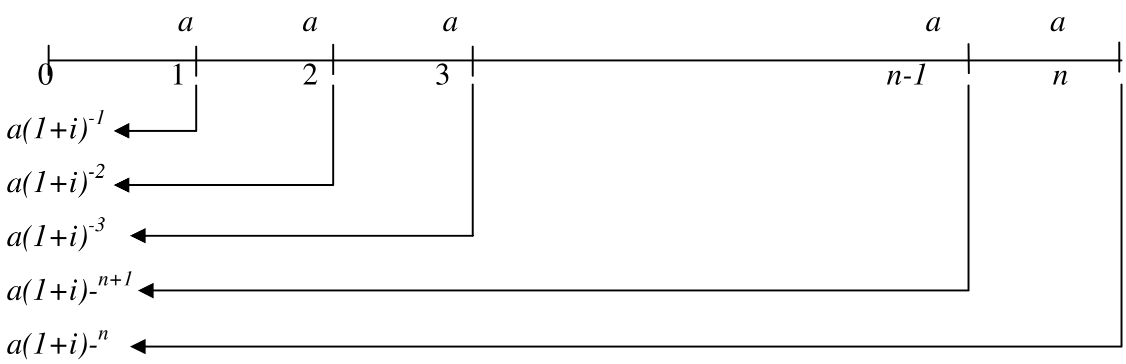
Soit :

V_0 = la valeur actuelle par la suite des annuités

a = l'annuité constante de fin de période

n = le nombre de périodes (d'annuités)

i = le taux d'intérêt par période de capitalisation



Alors:

$$V_0 = a\,(1+i)^{-1} + a\,(1+i)^{-2} + \ldots\ldots + a\,(1+i)^{-n+1} + a\,(1+i)^{-n}$$

On a donc une suite géométrique de premier terme a $(1+i)^{-1}$, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$ et comprenant *n* termes. La formule deviant :

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Le terme $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ est fourni par la table n°4.

<u>Exemple :</u>

Le bénéficiaire d'une créance représentée par 10 annuités, égales chacune à 1.500 U/M, a besoin de trésorerie immédiate. Il escompte au taux de 12%. Quelle somme recevra-t-il en échange ?

$$V_0 = 1.500\,\frac{1-(1{,}12)^{-10}}{0{,}12}$$

$$V_0 = 8.475{,}33\ UM$$