Fiche 5 : Amortissement des emprunts

LES ANNUITES

1. Définitions et caractéristiques

On appelle annuités une suite de versements perçus ou réglés à intervalles de temps réguliers.

Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme « annuité » par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».

Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période. Les versements effectués ont pour but :

- constituer un capital, il s'agit d'annuités de placement (versement en début de période) ou de capitalisation (versements en fin de période) ;

- rembourser une dette, c'est le cas des annuités de remboursements ou d'amortissements.

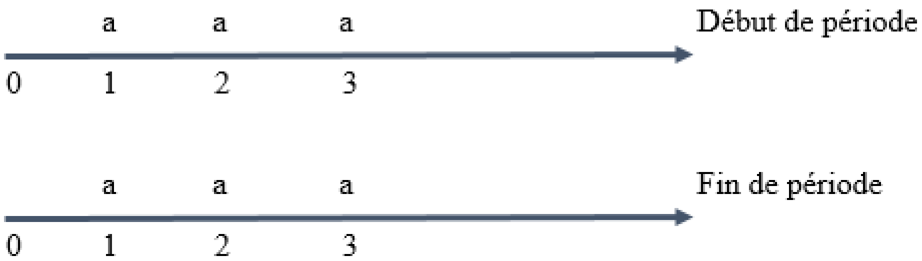
L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.

Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables.

Les annuités peuvent être certaines lorsque leur nombre est connu à l'avance, aléatoires ou viagères, lorsque leur nombre est inconnu au moment du contrat ou enfin perpétuelles lorsque leur nombre est illimité.

2. Les annuités constantes

La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement c'est à dire début de période ou fin de période.



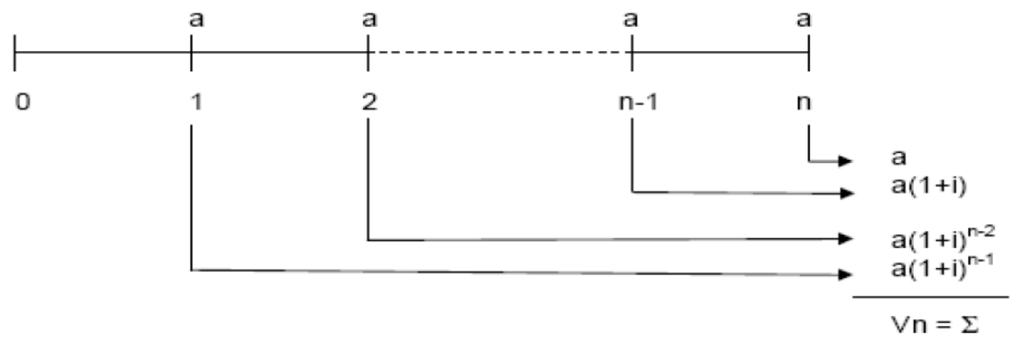
2.1. La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de capitalisation

La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de fin de période désigne la somme des valeurs acquises par chacune de ces annuités, exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.

Désignons par :

a : le montant constant de l'annuité ;

n : le nombre d'annuités (de périodes) ;
i : le taux d'intérêt ;
V_n : la valeur acquise par la suite d'annuités au terme de la dernière ;



On a alors :

$V_n = a + a\ (1+i) + a\ (1+i)^2 + \ldots.. + a\ (1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$

$V_n = a\ [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots.. + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\ ]$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique

q = (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc :

$Vn = a\ [((1+i)^n -1)/(1+i) -1]$

$Vn = a\ [(1+i)^n -1/i]$

Le terme $(1+i)^n -1/i$ est fourni par la table financière n°3.

Exemple :

Une personne place 50000 DA chaque année pendant 8 ans. Ces versements sont capitalisés au taux de 7%. Déterminer le capital constitué au terme du dernier versement.

Solution

$V_8 = 50000[(1{,}07)^8 -1/0{,}07]= 512990{,}1$DA.

2.2. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de capitalisation

La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période est la somme des annuités actualisées exprimée à la date origine (une période avant le premier versement).

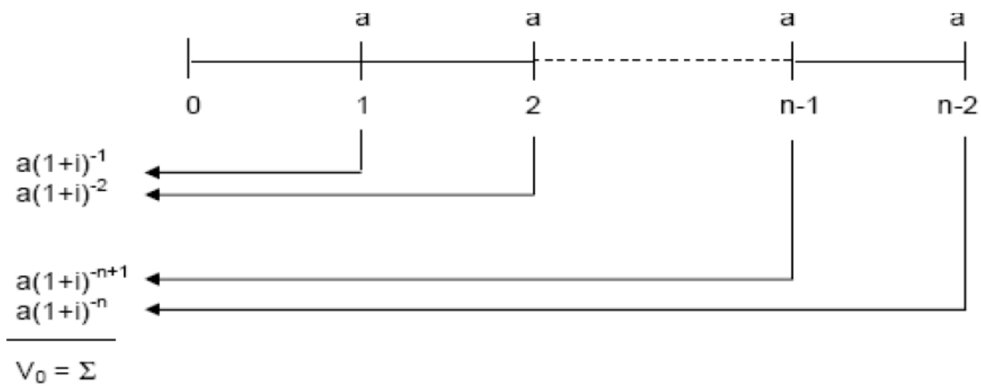
Soit :

V_0 = la valeur actuelle par la suite des annuités

a = l'annuité constante de fin de période

n = le nombre de périodes (d'annuités)

i = le taux d'intérêt par période de capitalisation



Alors :

V_0 = a $(1+i)^{-1}$ + a $(1+i)^{-2}$ + …..+ a $(1+i)^{-n+1}$ + a $(1+i)^{-n}$

On a donc une suite géométrique de premier terme a (1+i)-1, de raison géométrique q = $(1+i)^{-1}$ et comprenant n termes.

La formule devient :

V_0 = a $(1+i)^{-1}$ [$(1+i)^{-n}$-1/ $(1+i)^{-1}$ - 1]

V_0 = a [1-$(1+i)^{-n}$ /i]

Le terme 1-$(1+i)^{-n}$/i est fourni par la table n°4.

Exemple :

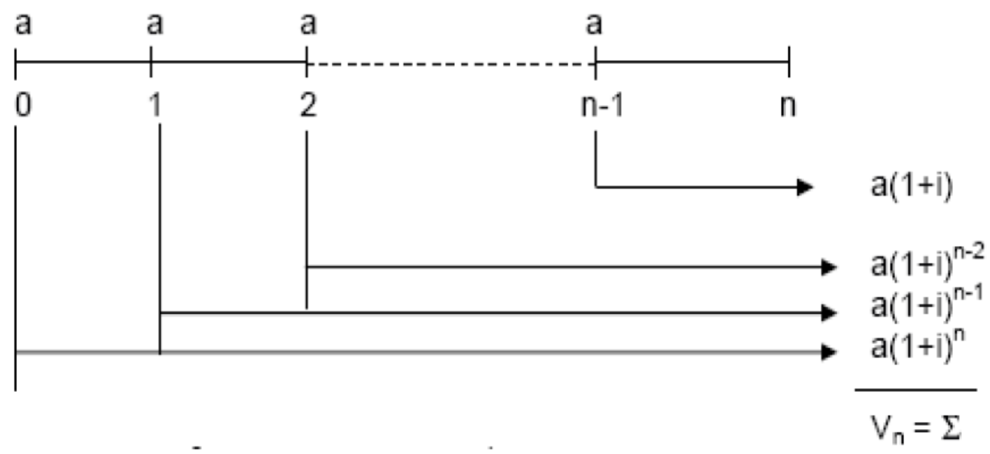
Le bénéficiaire d'une créance représentée par 10 annuités, égales chacune à 15000DA, a besoin de trésorerie immédiate. Il escompte au taux de 12%. Quelle somme recevra-t-il en échange ?

Solution

V_0 =15000[1-$(1,12)^{-12}$ /0,12]=15000 ×5, 650223=84753,3DA.

2.3. La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de placement

La valeur acquise par la suite d'annuités est égale à la somme des valeurs acquises par les versements successifs.



$V_n = a\,(1+i) + a\,(1+i)^2 + \ldots\ldots\ldots.+ a\,(1+i)^{n-1} + a\,(1+i)^n$

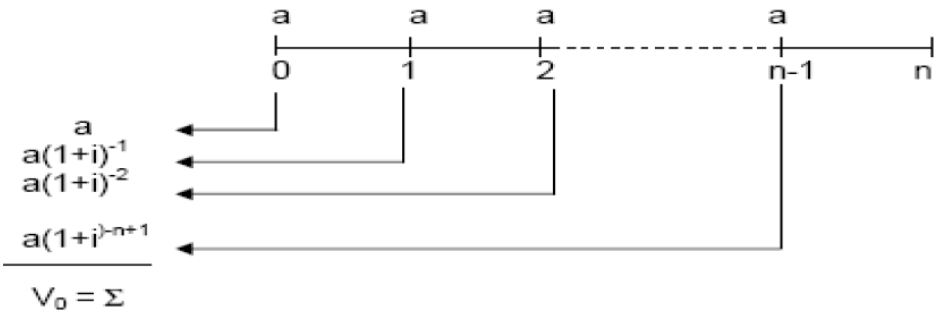
On a donc une suite géométrique de premier terme a (1+i), de raison géométrique q= (1+i) et comprenant n termes.

La formule devient donc :

$V_n = a\,(1+i)[\,(1+i)^n -1 /i]$

2.4. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de placement

Pour actualiser une suite d'annuités constantes de fin de période, on s'est placé à l'époque zéro, c'est- à –dire au moment de la signature du contrat, c'est- à dire aussi, une période avant le premier versement. Pour actualiser les annuités de début de période, on se place à l'époque zéro, celle qui correspond au premier versement.



$V_0 = a + a\,(1+i)^{-1} + a\,(1+i)^{-2} + \ldots..+ a\,(1+i)^{-n+1}$

On a donc une suite géométrique de premier terme a, de raison géométrique $q=(1+i)^{-1}$ et comprenant n termes.

La formule devient :

$V_0 = a\,[(1+i)^{-n} -1 / (1+i)^{-1} -1]$

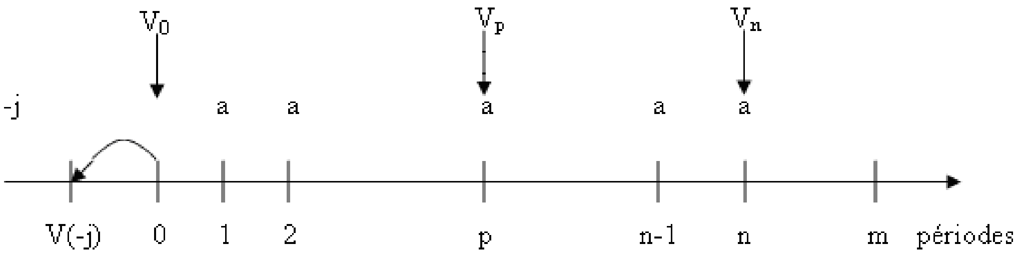
$V_0 = a\,(1+i)\,[1- (1+i)^{-n} /i]$

2.5. Evaluation d'une suite d'annuités constantes à une date quelconque

La notion d'équivalence s'applique également aux suites d'annuités. L'évaluation à une date quelconque implique là encore le recours aux principes d'actualisation et de capitalisation.

2.5.1. Représentation graphique du problème

Il est possible d'évaluer une suite d'annuités constantes à n'importe quelle époque. Le problème se résumant soit à une opération de calcul de valeur acquise, ou de calcul de valeur actuelle, à partir du moment où sont précisées les périodes.



2.5.2. Formalisation

a) Evaluation à l'époque m (m>n) :

La valeur acquise à l'époque (m) serait :

$V_m = V_n (1+i)^{m-n}$ ou $V_m = V_0 (1+i)^m$

Ainsi, on obtient :

$V_m = a [1-(1+i)^{-n} /i] (1+i)^m$

b) Evaluation à l'époque p (o<p<n) :

En partant de V_0, V_0 sera capitalisé pendant p périodes :

$V_p = V_0 (1+i)^p = a [1-(1+i)^{-n} /i] (1+i)^p$

En partant de V_n , V_n sera actualisé pendant (n-p) périodes:

$V_p = V_n (1+i)^{-(n-p)} = a [(1+i)^n -1/i](1+i)^{-(n-p)}$

$V_p = a [1-(1+i)^{-n} /i] (1+i)^p$

c) Evaluation à l'époque (j); (j<0) :

A partir de V_0 :

$V_{-j} = V_0 (1+i)^{-j} = a [1-(1+i)^{-n} /i] (1+i)^{-j}$

A partir de V_n:

$V_{-j} = V_n (1+i)^{-(n+j)} = a [(1+i)^n -1/i] (1+i)^{-n} (1+i)^{-j}$

$V_{-j} = a [1-(1+i)^{-n} /i] (1+i)^{-j}$

L'évaluation peut avoir lieu à n'importe quelle époque ; connaissant le point de départ, et le point d'arrivée, en utilisant soit le calcul de la valeur acquise, soit le calcul de la valeur actuelle, soit les deux à la fois.