Cinématique

- *Notions et définitions*
- *Vecteur position*
- *Vecteur accélération*
- *Mouvement relatif*

- ***Objet de la cinématique:***

La cinématique consiste à décrire la manière dont un corps se déplace dans l'espace en fonction du temps, sans s'attacher aux causes qui produisent ce mouvement.

Position (trajectoire)

La cinématique *Vitesse*

Accélération

- ***Point matériel:***

Si le corps est de faible dimension par rapport à ses variations de position, on peut assimiler le mouvement du corps au mouvement de son centre de gravité.

On néglige tout effet de rotation du corps sur lui-même ou son extension spatiale.

- ***Repère :***

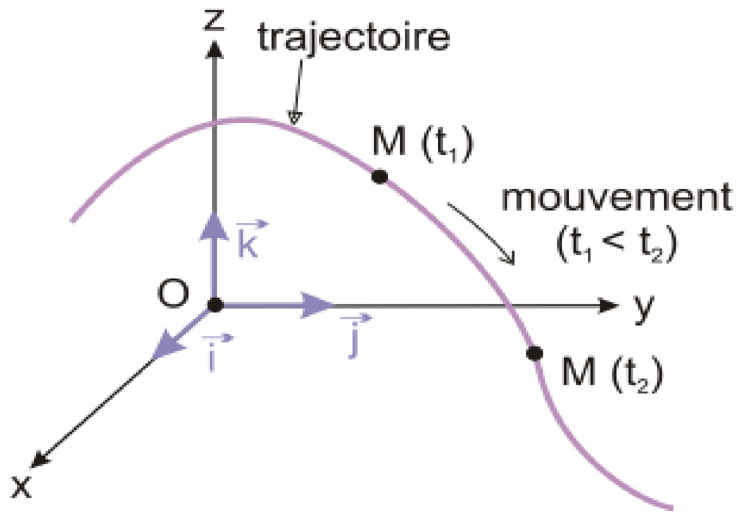
C'est un outil mathématique (système d'axes) permettant de repérer les points de l'espace à l'aide de leurs coordonnées.

- ***Référentiel :***

Référentiel $(\mathcal{R})$ = *Repère d'espace* + *Repère de temps*

➢ ***Trajectoire:***

La trajectoire d'un point mobile est la ligne qui joint, d'une manière continue, les différentes positions successives prise par le mobile au cours de son mouvement.



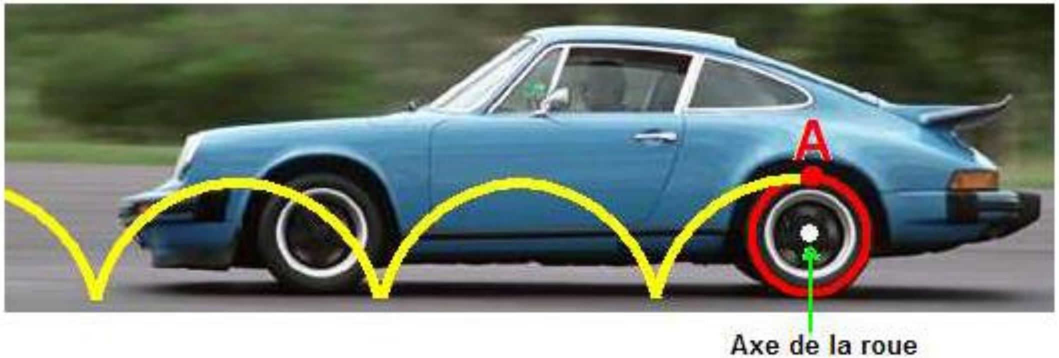
❖ ***Remarque:***

Il est indispensable de préciser le référentiel dans lequel on observe un mouvement.

***Exemple** : Une voiture circule sur une voie rectiligne.*

Quelle est la trajectoire du point A de la roue, par rapport à :

- *un repère lié à la route*
- *l'axe de la roue arrière*

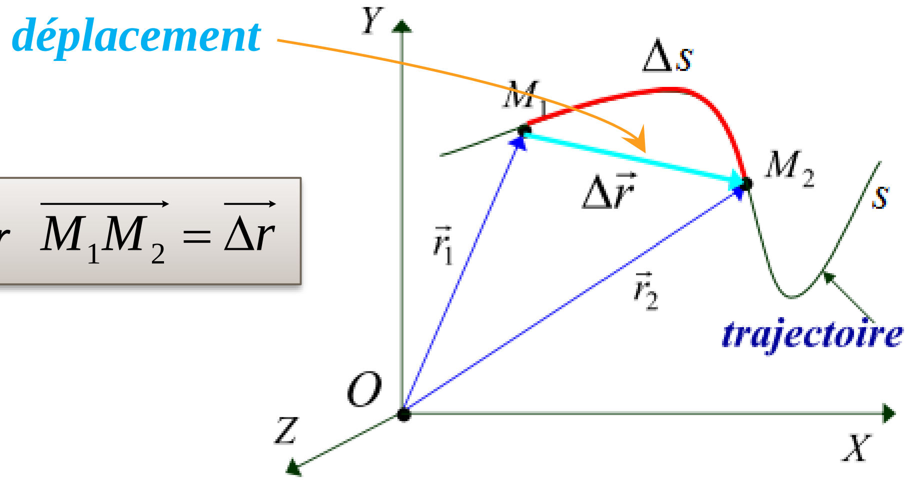


- *par rapport à la route, le point A décrit une courbe appelée cycloïde (courbe en jaune).*

- *Par rapport à l'axe de la roue arrière le mouvement de A est circulaire (cercle en rouge).*

➢ ***Déplacement:***

- *Le déplacement est une grandeur vectorielle qui caractérise un changement de position.*



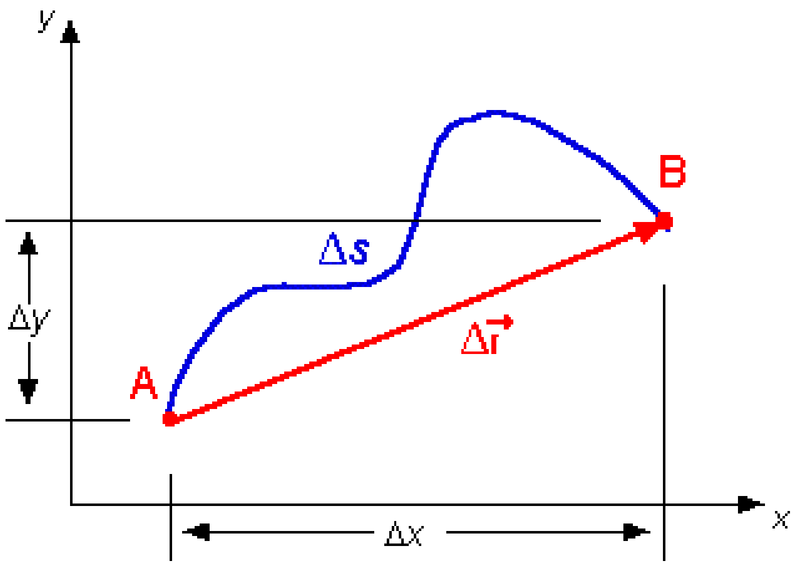
le déplacement est le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{\Delta r}$

Le déplacement est indépendant du chemin parcouru pour aller de M_1 *à* M_2

- *Le chemin* Δs *est une grandeur scalaire, toujours positive, égale à la distance parcourue sur la trajectoire.*

- ***Remarque:***

$\Delta s, \overrightarrow{\Delta r}, \Delta x$?



$\Delta s, \Delta x :$ *Grandeurs algébriques*

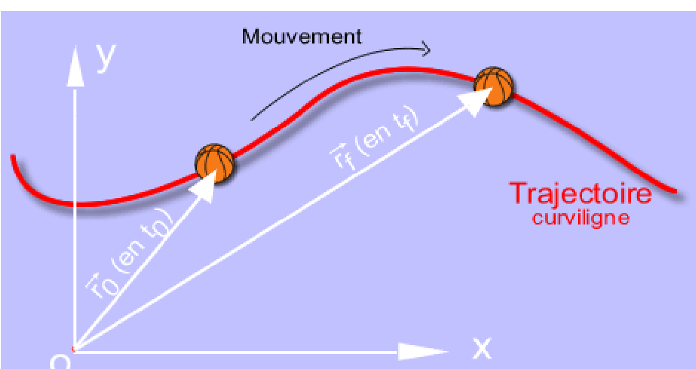
$\overrightarrow{\Delta r} :$ *Grandeur vectorielle*

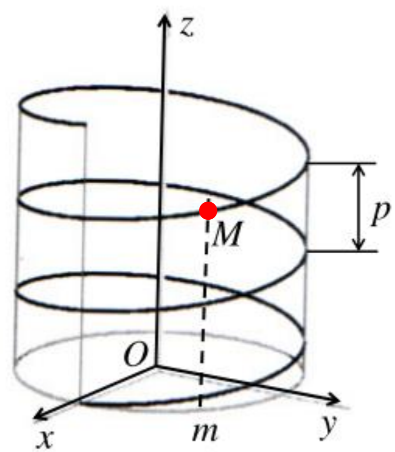
➢ ***Vecteur position:***

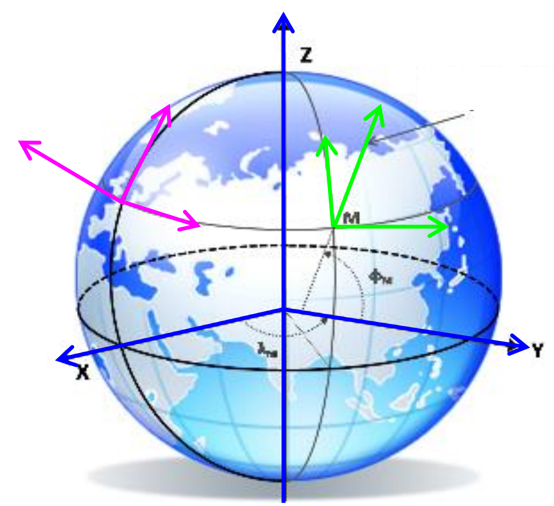
- *Pour pouvoir étudier le mouvement d'un point matériel dans l'espace, il faut être capable de le repérer dans cet espace.*

→ *Vecteur Position*

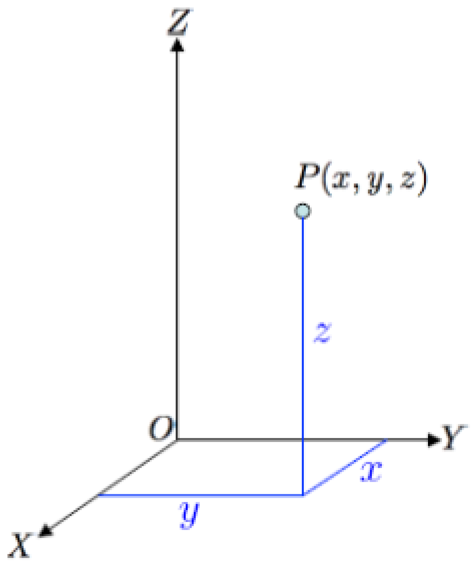
- *Selon la nature de la trajectoire du mobile, on peut définir sa position de différentes manières.*



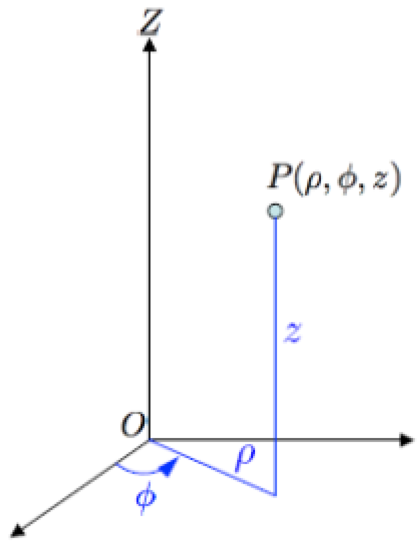




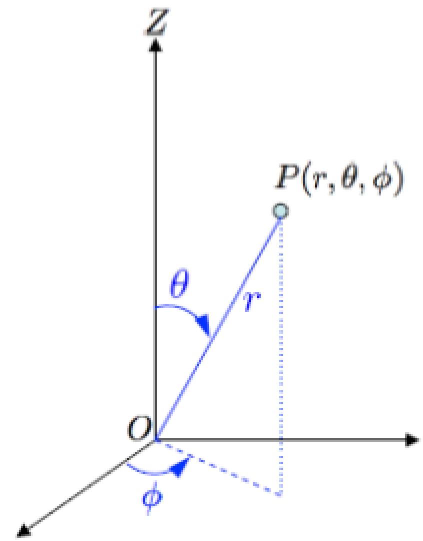
- ***Vecteur position:***



Coordonnées
Cartésiennes



Coordonnées
Cylindriques



Coordonnées
Sphériques

Le choix du systèmes de coordonnées n'affecte en aucun cas le mouvement du mobile (position, vitesse, accélération).

➢ ***Vecteur position en coordonnées cartésiennes :***

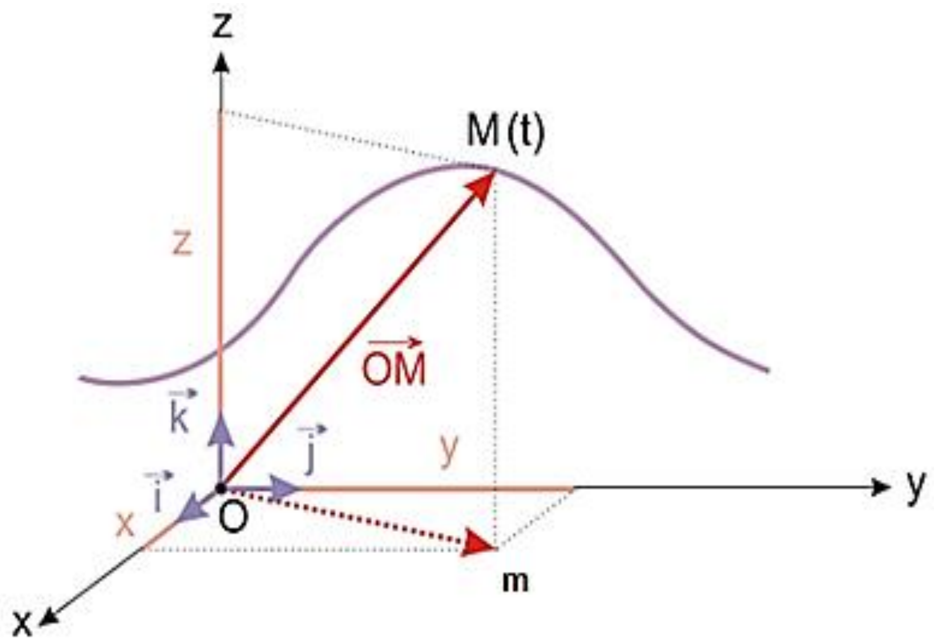
- C'est le système de coordonnées le plus simple du point de vue mathématique.
- *On utilise le repère* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
- *Un point M de l'espace est repéré par le vecteur position :*

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

x : abscisse

y : ordonnée

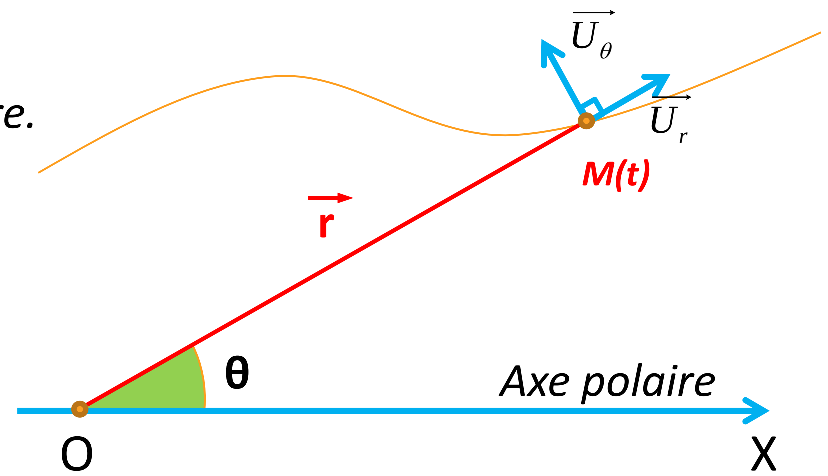
z : côte



➢ Vecteur position en coordonnées polaires :

- *Les coordonnées polaires sont utilisées dans un problème **plan** (2 dimensions).*

- *Dans un plan P, on définit :*
  - *un point origine O*
  - *un demi-axe OX appelé axe polaire.*



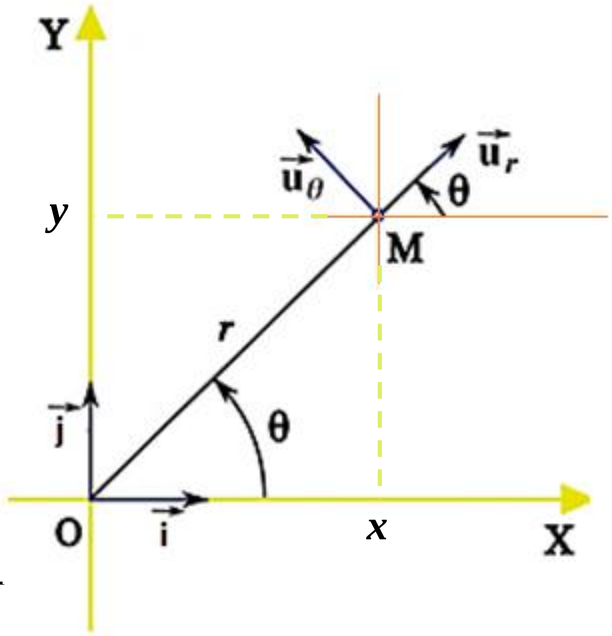
- *Le point M est défini par :*
  - $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$
  - *l'angle θ : angle polaire*

- *On définit une nouvelle base « polaire » :* $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$

La base $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$ est une base locale : elle varie avec la position du point M.

Vecteur position en coordonnées polaires :

- Le vecteur position s'écrit : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{U_r}}$



Relation entre base polaire et cartésienne :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{U_r} &= \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\\ \overrightarrow{U_\theta} &= -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\end{aligned}}$$

Et on a :

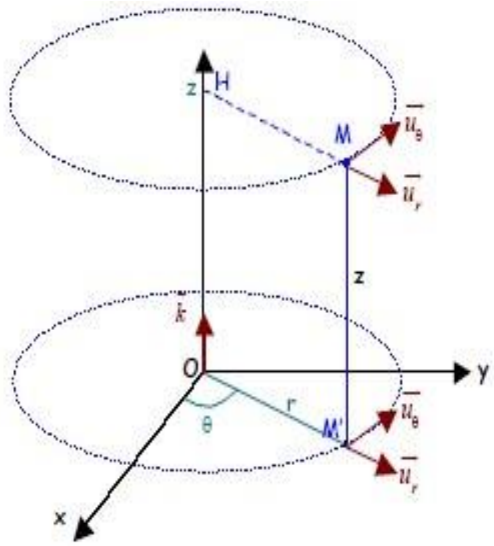
$$\left|\begin{aligned} x &= r\cos\theta\\ y &= r\sin\theta\end{aligned}\right. \rightarrow \left|\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}\\ \theta &= \arctan\frac{y}{x}\end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned}\overrightarrow{U_r}&\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}\\ \overrightarrow{U_\theta}&\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}\end{aligned}\right. \rightarrow \left|\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} &= \begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix} = \overrightarrow{U_\theta}\\ \frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{d\theta} &= \begin{bmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{bmatrix} = -\overrightarrow{U_r}\end{aligned}\right. \rightarrow \boxed{\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} &= \overrightarrow{U_\theta}\\ \frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{d\theta} &= -\overrightarrow{U_r}\end{aligned}}$$

➢ *Vecteur position en coordonnées cylindriques:*

- *Les coordonnées cylindriques sont utilisées dans le cas d'une symétrie axiale (rotation autour d'un axe).*

- *Les coordonnées cylindriques sont une extension en 3 dimensions des coordonnées polaires.*



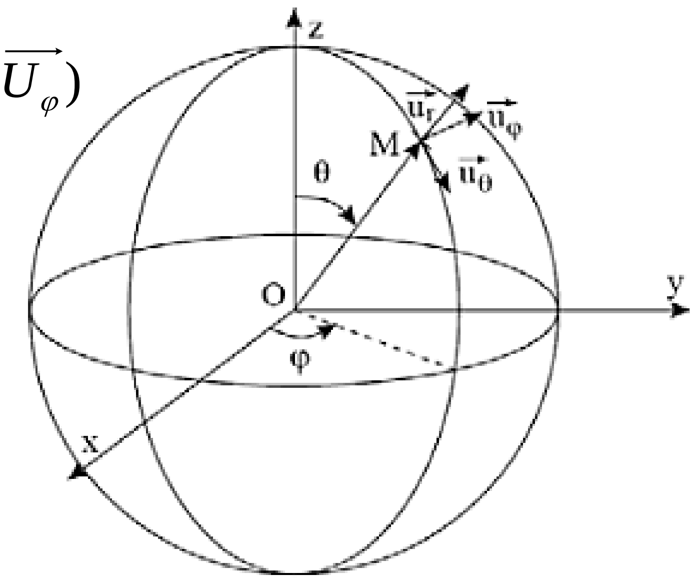
- *On définit une nouvelle base « cylindrique » :* $(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \vec{k})$

- *Le vecteur position s'écrit:* $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{U_r} + z\,\vec{k}}$

La base $(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \vec{k})$ *est une base locale : elle varie avec la position du point* M*.*

➢ *Vecteur position en coordonnées sphériques:*

- *Les coordonnées sphériques sont utilisées dans le cas d'une symétrie radiale (rotation autour d'un point).*
- *On définit une nouvelle base « sphérique » :* $(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\varphi})$



$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ *le rayon vecteur*

$\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$ *la colatitude*

$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$ *la longitude ou azimut*

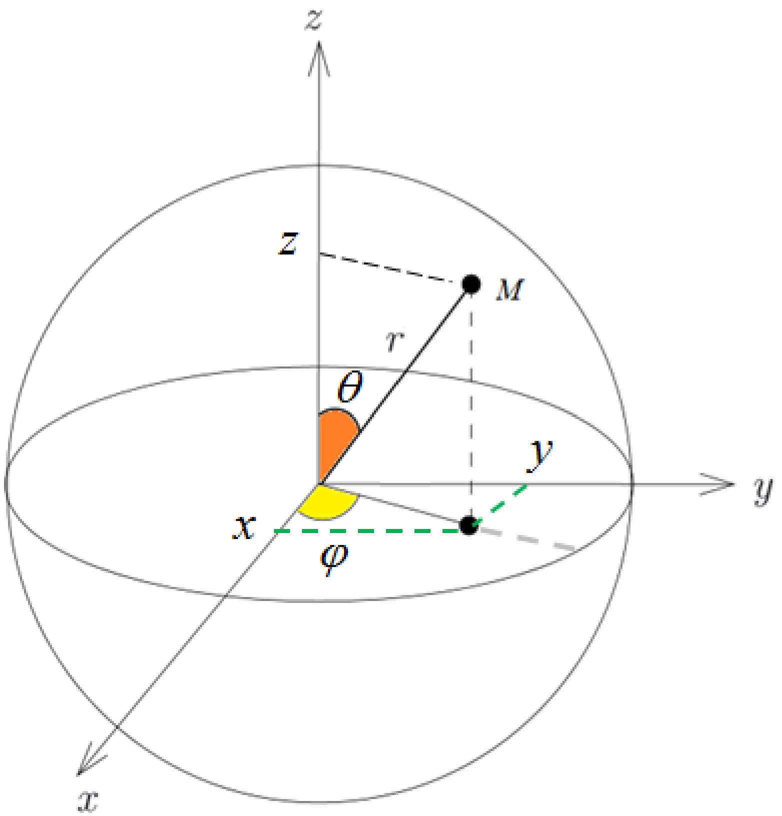
- *Le vecteur position s'écrit:* $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{U_r}}$

La base $(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\varphi})$ *est une base locale : elle varie avec la position du point* M.

- ***Relation entre coordonnées sphériques et cartésienne :***

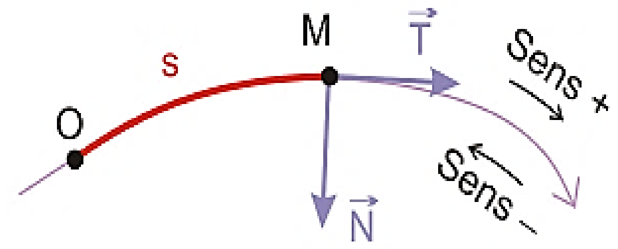
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$



➢ Coordonnées curvilignes : (Repère de Frenet)

- *La position du mobile M est repérée le long de sa trajectoire, et elle est définit par son abscisse curviligne s (valeur algébrique de l'arc $\overset{\frown}{OM}$).*



- *Le repère de Frenet est lié au point M et comporte deux vecteurs unitaires :*

$\vec{T}$: *tangent à la trajectoire au point M et orienté dans le sens de l'orientation de la trajectoire.*

$\vec{N}$: *perpendiculaire à et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.*

➢ *Vitesse d’un point*

- *La vitesse est une grandeur qui mesure l'évolution de la position par rapport au temps. Cette grandeur est vectorielle car le mouvement d'un point se caractérise par une direction et un sens.*

- *Elle doit toujours être calculée par rapport à un référentiel (R).*

- *On distingue deux vitesses :*

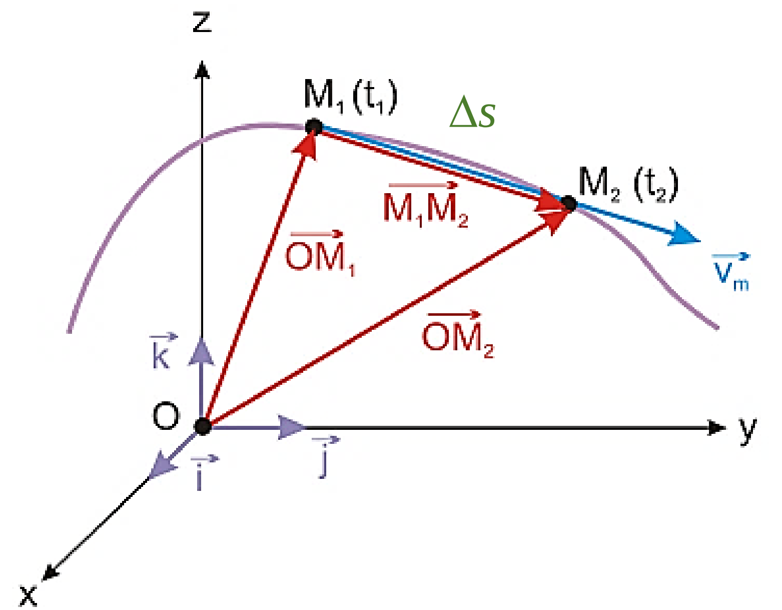
  - Vitesse moyenne

  - Vitesse instantanée.

➢ *Vitesse moyenne*

- *La vitesse moyenne est définit comme le rapport entre la distance parcourue par le temps écoulé.*

$$V_m = \frac{M_1M_2}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



- *Le vecteur vitesse moyenne est défini par :*

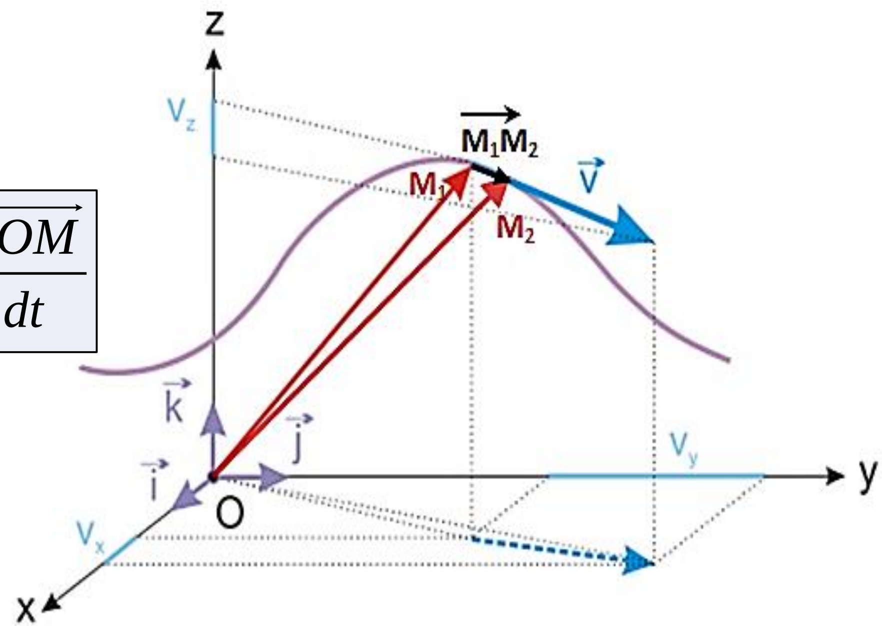
$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

- La vitesse moyenne ne permet pas d'avoir la vitesse à un instant bien donné entre t_1 et t_2

➢ *Vitesse instantanée*

- *La vitesse instantanée permet d'obtenir la vitesse du mobile à un instant bien déterminé.*
- *Elle est obtenue en prenant* $\Delta t \to 0$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

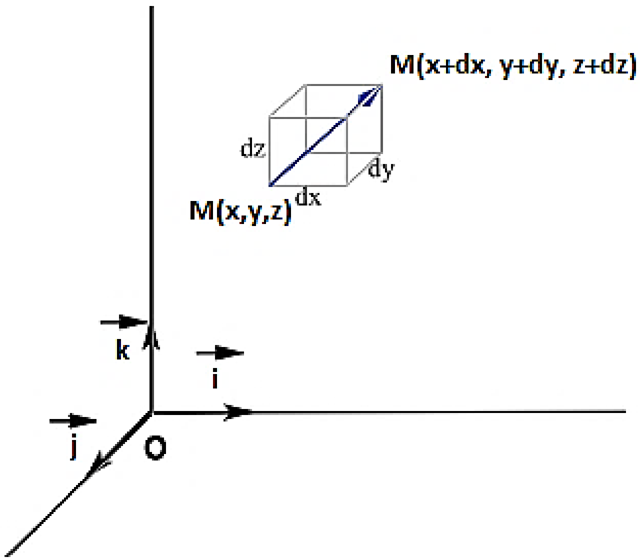


Le vecteur vitesse $\vec{V}$ *est toujours tangent à la trajectoire.*

➢ *Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes*

$$M(x, y, z) \rightarrow M(x+dx, y+dy, z+dz)$$

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(x+dx, y+dy, z+dz) - \overrightarrow{OM}(x, y, z)$$
$$= dx\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\vec{k}$$



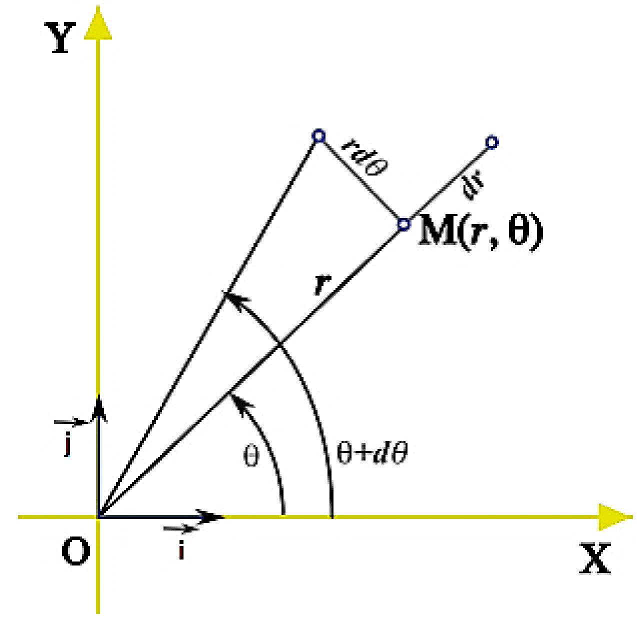
$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}}$$

$$\left| \begin{array}{l} V_x = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \\[2ex] V_y = \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} \\[2ex] V_z = \dot{z} = \dfrac{dz}{dt} \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Expression de la vitesse en coordonnées polaires

$$M(r,\theta) \rightarrow M(r+dr,\theta+d\theta)$$

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(r+dr,\theta+d\theta) - \overrightarrow{OM}(r,\theta)$$
$$= dr\overrightarrow{U_r} + rd\theta\overrightarrow{U_\theta}$$



$$\rightarrow \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\overrightarrow{U_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta} = \dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}}$$

$\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$ *Vitesse angulaire*

$V_r = \dot{r}$ *Vitesse radiale*

$V_\theta = r\dot{\theta}$ *Vitesse orthoradiale*

$$\rightarrow \quad V = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

➢ Expression de la vitesse en coordonnées cylindriques

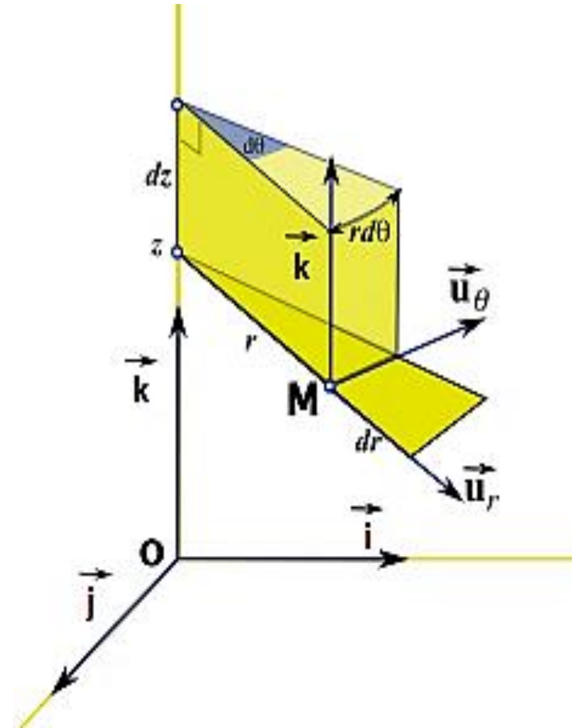
$$M(r,\theta,z) \rightarrow M(r+dr,\theta+d\theta,z+dz)$$

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(r+dr,\theta+d\theta,z+dz) - \overrightarrow{OM}(r,\theta,z)$$

$$= dr\overrightarrow{U_r} + rd\theta\overrightarrow{U_\theta} + dz\,\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\,\vec{k} = \dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\,\vec{k}}$$



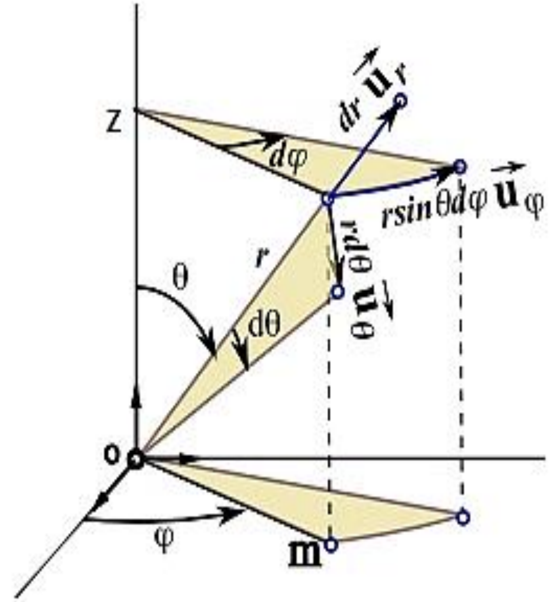
$$\left|\begin{array}{l} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\,\dot{\theta} \\ V_z = \dot{z} \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad V = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\,\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

➢ *Expression de la vitesse en coordonnées sphériques*

$$M(r,\theta,\varphi) \rightarrow M(r+dr,\theta+d\theta,\varphi+d\varphi)$$

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(r+dr,\theta+d\theta,\varphi+d\varphi) - \overrightarrow{OM}(r,\theta,\varphi)$$

$$= dr\overrightarrow{U_r} + rd\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{U_\varphi}$$



$$\rightarrow \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{U_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + (r\sin\theta)\dot{\varphi}\overrightarrow{U_\varphi}}$$

$$V_r = \dot{r}$$

$$V_\theta = r\dot{\theta}$$

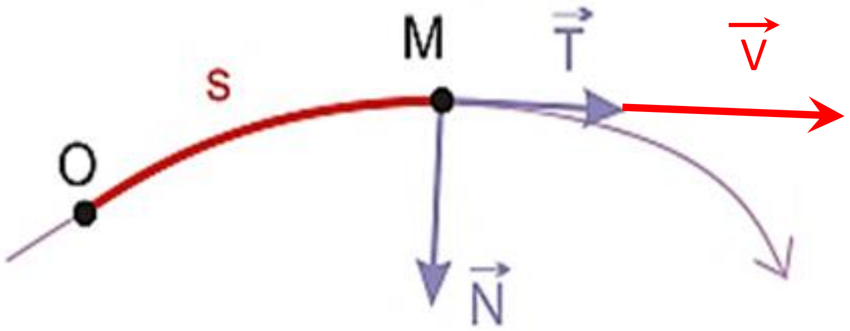
$$V_\varphi = (r\sin\theta)\dot{\varphi}$$

$$\rightarrow \quad V = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}\sin\theta)^2}$$

➢ *Expression de la vitesse en coordonnées curvilignes*

- *La vitesse est toujours tangent à la trajectoire.*
- *La vitesse s'écrit :*

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = V\,\vec{T}}$$



➢ *Accélération d'un point*

- *La rapidité avec laquelle la vitesse du mobile varie au cours de son mouvement s'exprime par l'accélération .*

- *On distingue deux vitesses :*

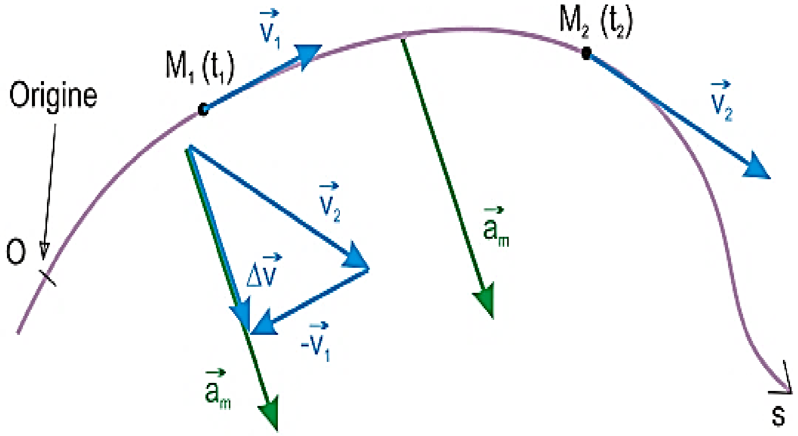
  - Accélération moyenne

  - Accélération instantanée.

➢ *Accélération moyenne*

- *L'accélération moyenne est définit comme le rapport entre la variation de la vitesse durant l'intervalle de temps* Δt *et le temps écoulé* Δt.

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$



➢ *Accélération instantanée*

- *L'accélération instantanée permet de connaitre l'accélération du mobile à un instant bien donné.*
- *Elle est obtenue en réduisant l'intervalle de temps* Δt $(\Delta t \to 0)$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

- ***Expression de l'accélération en coordonnées cartésiennes***

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}}$$

$$\left| \begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \ddot{z} = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

- ***Expression de l'accélération en coordonnées polaires***

$$\vec{V} = \dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta})}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} + \dot{\theta}\frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\,\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt}$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} \\[2ex] \dfrac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{U_\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r} \end{array}\right.$$

$$= \ddot{r}\,\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \dot{\theta}\,\dot{r}\,\overrightarrow{U_\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} - r\,\dot{\theta}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{U_r} + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\overrightarrow{U_\theta}}$$

$$\left|\begin{array}{l} a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_r{}^2 + a_\theta{}^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)^2 + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})^2}$$

- ***Expression de l'accélération en coordonnées cylindriques***

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\vec{k}\right)}{dt}$$

$$= \frac{d\dot{r}}{dt}\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} + \dot{\theta}\frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} \\ \dfrac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{U_\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_r} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{U_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{U_\theta} + \ddot{z}\,\vec{k}}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \Rightarrow \quad a = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2}$$

- ***Expression de l'accélération en coordonnées sphériques***

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + (r\sin\theta)\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{U_\varphi})}{dt}$$

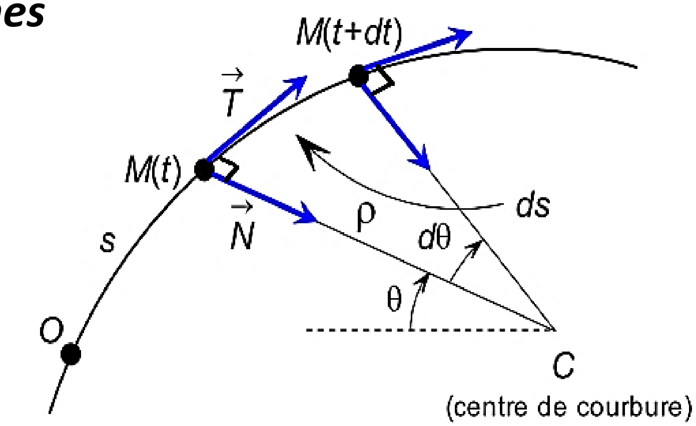
Le développement de cette dérivé nous donne :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,\overrightarrow{U_r} + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\,\overrightarrow{U_\theta} + (r\,\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\,\overrightarrow{U_\varphi}}$$

➢ *Expression de l'accélération en coordonnées curvilignes*

On a : $\dfrac{ds}{dt} = V, \quad ds = \rho d\theta \rightarrow \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{\rho}, \quad \dfrac{d\vec{T}}{d\theta} = \vec{N}$

C : centre de courbure, ρ : rayon de courbure



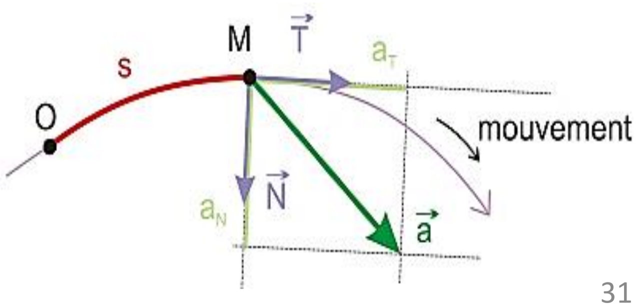
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\vec{T})}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{1}{\rho}V\vec{N} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{\rho}\vec{N}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{\rho}\vec{N}}$$

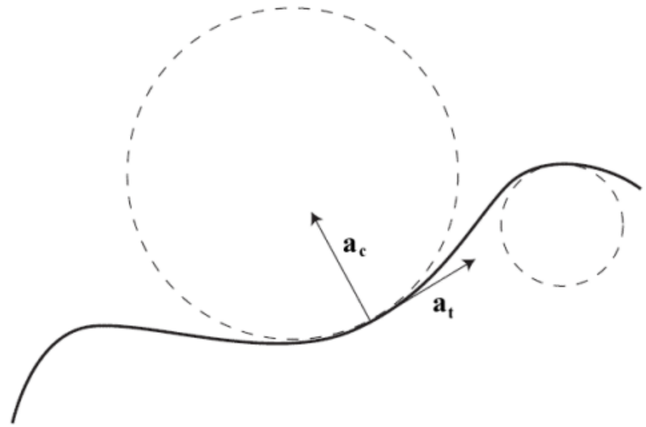
$a_T = \dfrac{dV}{dt}$ *Accélération tangentielle*

$a_N = \dfrac{V^2}{\rho}$ *Accélération normale*



➢ *Expression de l'accélération en coordonnées curvilignes*

- *On peut analyser n'importe quel mouvement à l'aide de ces formules puisqu'on peut considérer que n'importe quelle partie d'une trajectoire courbe est une partie d'un cercle.*



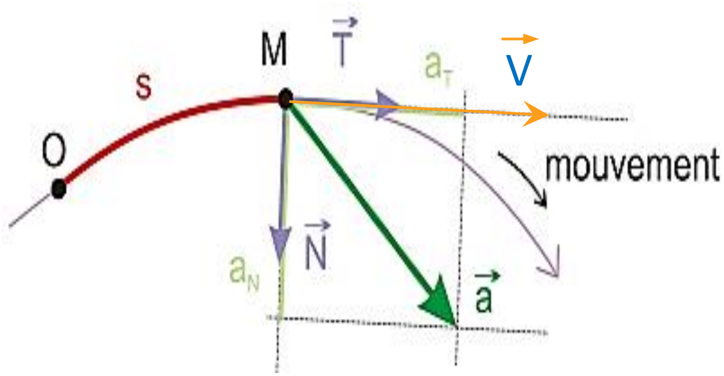
❖ *Remarques:*

- *On a :* $a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{a_r{}^2 + a_\theta{}^2} = \sqrt{a_T{}^2 + a_N{}^2}$

$$a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)^2 + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}$$

- *Le rayon de courbure* ρ *de la trajectoire peut varier durant le mouvement*

❖ ***Remarques:***



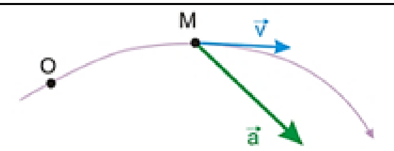
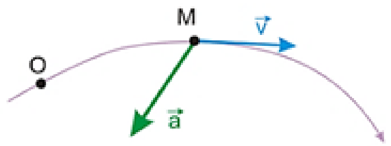
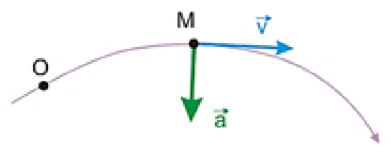
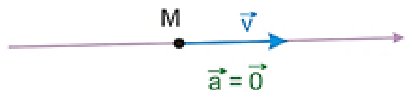
Sachant que : $\vec{k} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ *, on a :*

$$\vec{V} \wedge \vec{a} = V\,\vec{T} \wedge \left(\frac{dV}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{\rho}\vec{N}\right) = V\,\frac{dV}{dt}(\vec{T} \wedge \vec{T}) + \frac{V^3}{\rho}(\vec{T} \wedge \vec{N}) = \frac{V^3}{\rho}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{V^3}{\left|\vec{V} \wedge \vec{a}\right|}}$$

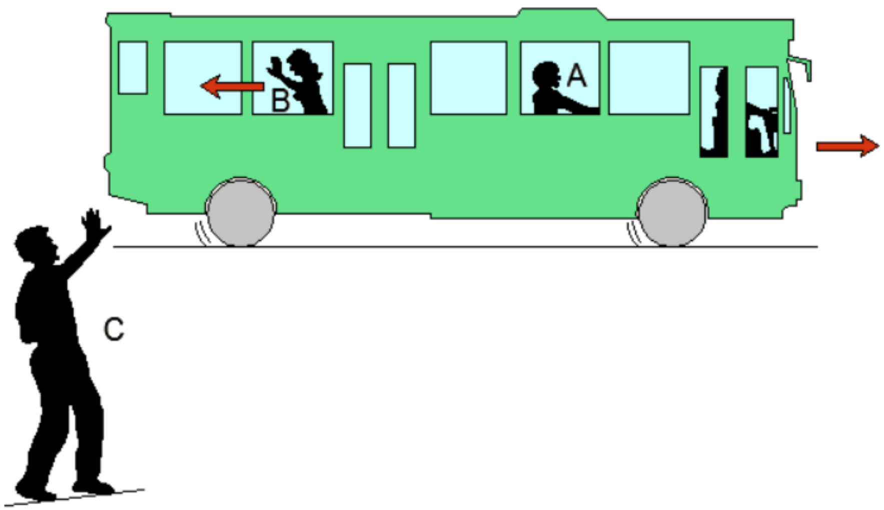
❖ *Remarques:*

- *Le produit scalaire entre la vitesse et l'accélération permet de savoir la nature du mouvement.*

	$\vec{V}.\vec{a} > 0 \Rightarrow$ *Mouvement accéléré* $\left(\vec{V},\vec{a}\right) < \frac{\pi}{2}$
	$\vec{V}.\vec{a} < 0 \Rightarrow$ *Mouvement décéléré* $\left(\vec{V},\vec{a}\right) > \frac{\pi}{2}$
	$\vec{V}.\vec{a} = 0 \Rightarrow$ *Mouvement uniforme* $\left(\vec{V},\vec{a}\right) = \frac{\pi}{2}$
	$\vec{V}.\vec{a} = 0$ *et* $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow$ *Mouvement rectiligne uniforme*

➢ *Mouvement relatif*

- On parle de mouvement relatif quand on met en relation le mouvement par rapport à deux repères différents.



Est en mouvement par rapport à	A	B	C	Le bus	La route
A		Oui	Oui	Non	Oui
B	Oui		Non	Oui	Non
C	Oui	Non		Non	Non
Le Bus	Non	Oui	Oui		Oui
La route	Oui	Non	Non	Oui	

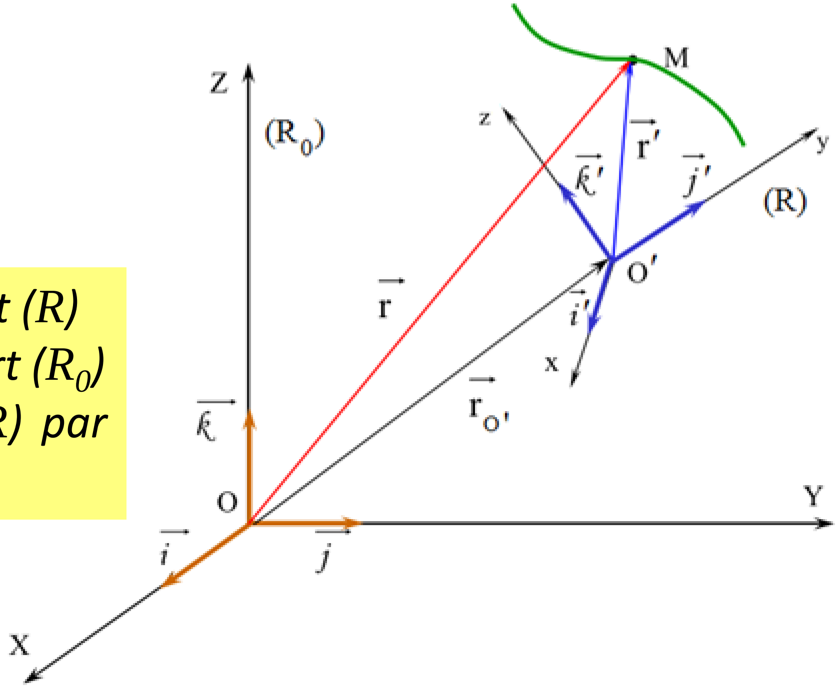
Le mouvement est une notion relative

➢ Mouvement relatif

(R_0) : référentiel fixe

(R) : référentiel mobile par rapport à (R_0)

Mouvement relatif *: le mouvement de M par rapport (R)*
Mouvement absolu *: le mouvement de M par rapport (R_0)*
Mouvement d'entraînement *: le mouvement de (R) par rapport à (R_0)*



➢ Composition des vitesses

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + (x\,\vec{i}\,' + y\,\vec{j}\,' + z\,\vec{k}\,')$$

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\overrightarrow{V_a}} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}_{\overrightarrow{V_e}} + \underbrace{\dot{x}\,\vec{i}\,' + \dot{y}\,\vec{j}\,' + \dot{z}\,\vec{k}\,'}_{\overrightarrow{V_r}}$$

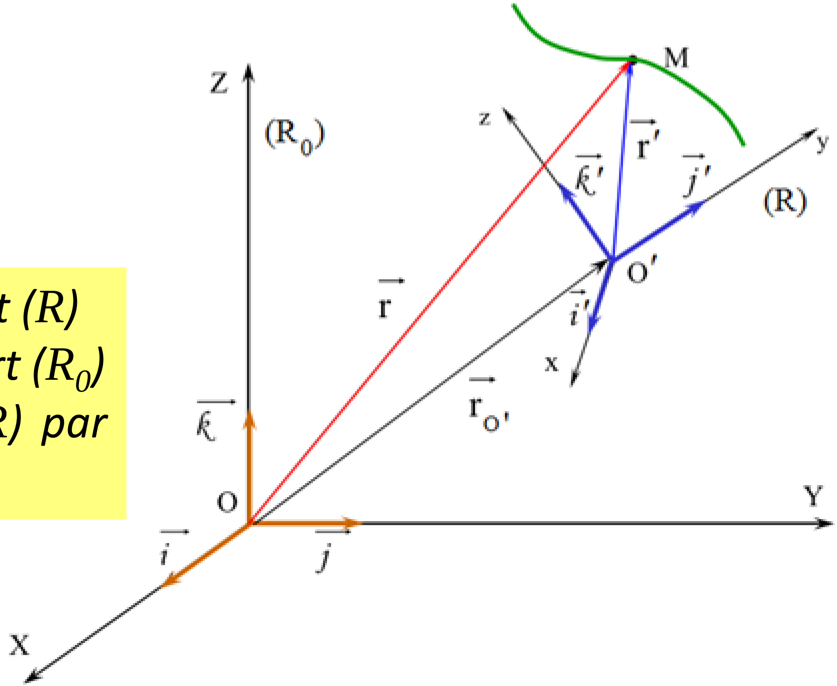
Vitesse absolue *Vitesse d'entraînement* *Vitesse relative*

- ***Mouvement relatif***

  (R_0) : référentiel fixe

  (R) : référentiel mobile par rapport à (R_0)

Mouvement relatif *: le mouvement de M par rapport (R)*
Mouvement absolu *: le mouvement de M par rapport (R_0)*
Mouvement d'entraînement *: le mouvement de (R) par rapport à (R_0)*



- ***Composition des accélérations***

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

accélération absolue

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}$$

accélération d'entraînement

$$\vec{a}_r = \ddot{x}\,\vec{i}\,' + \ddot{y}\,\vec{j}\,' + \ddot{z}\,\vec{k}\,'$$

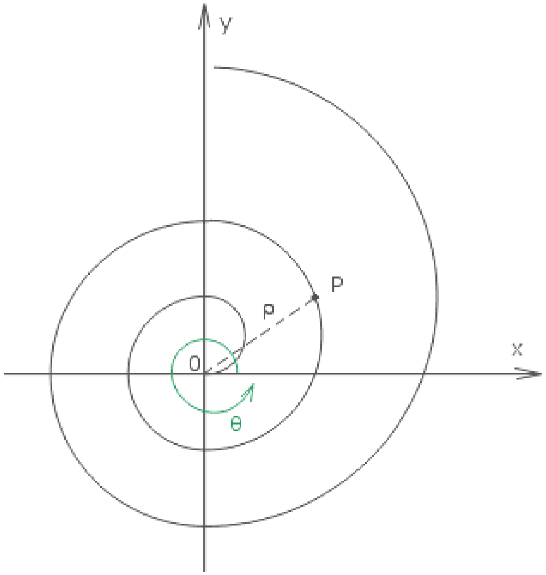
accélération relative

$$\vec{a}_c = 2(\dot{x}\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}\,'}{dt})$$

accélération complémentaire ou de Coriolis

➢ *Application 1*

On considère un mouvement se faisant sur une trajectoire spirale d'équation $\rho = A\,\theta$

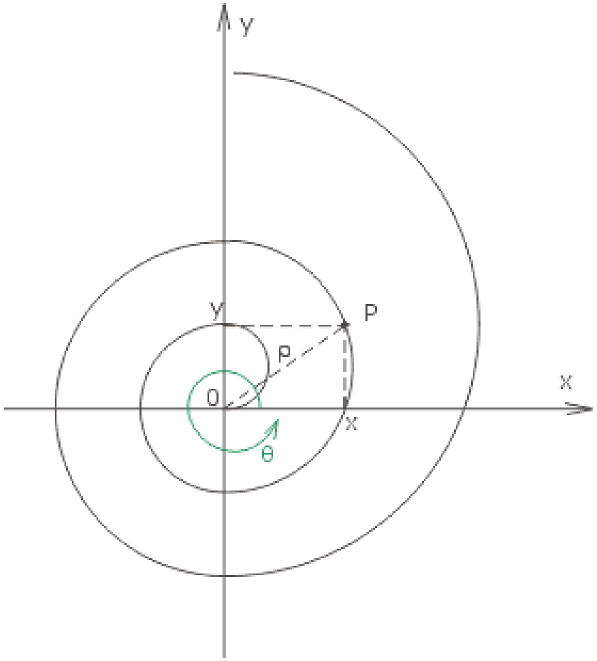


Le mouvement se fait à vitesse angulaire constante ω_0

1. Donner l'équation horaire en coordonnées polaires puis en coordonnées cartésiennes.

Le vecteur position s'écrit : $\vec{\rho} = \rho\,\overrightarrow{U_r} = A\,\theta\,\overrightarrow{U_r} = A\,\omega_0 t$

$x(t),\;\; y(t)$ *?*



$$x(t) = \rho(t)\cos\theta = A\omega_0 t\;\cos\omega_0 t$$

$$y(t) = \rho(t)\sin\theta = A\omega_0 t\;\sin\omega_0 t$$

L'équation de la trajectoire :

$$x^2 + y^2 = (A\omega_0 t)^2$$

➢ Application 1

On considère un mouvement se faisant sur une trajectoire spirale d'équation $\rho = A\,\theta$

Le mouvement se fait à vitesse angulaire constante ω_0

2. Quel est le vecteur vitesse dans les deux représentations ?

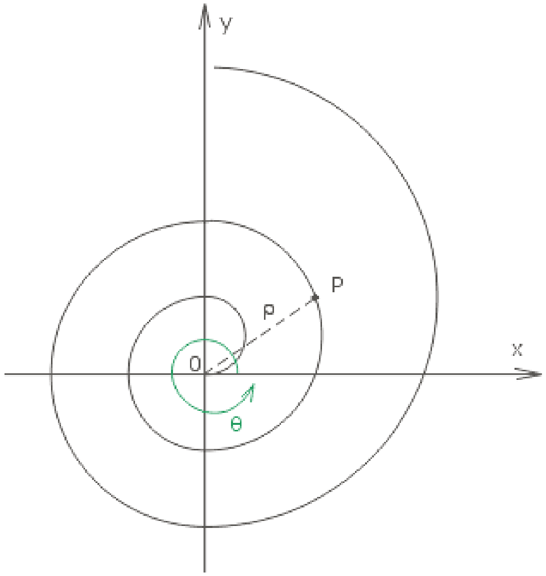
Coordonnées cartésiennes:

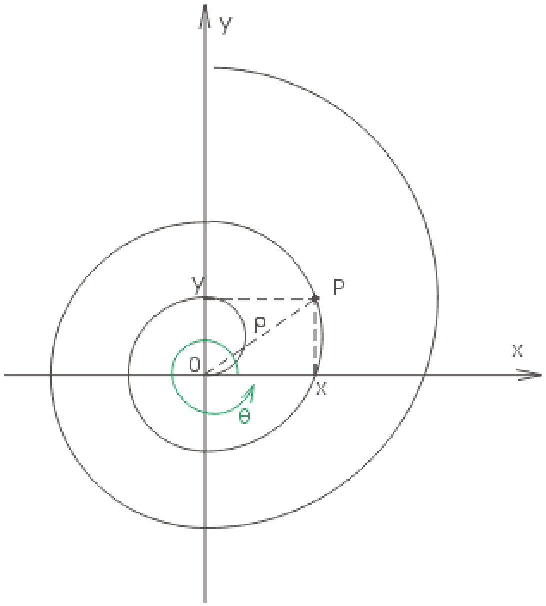
$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A\omega_0 t\,\cos\omega_0 t)}{dt} = A\omega_0\cos\omega_0 t - A\omega_0^2 t\sin\omega_0 t$$

$$V_x = A\omega_0\,(\cos\omega_0 t - \omega_0 t\sin\omega_0 t)$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(A\omega_0 t\,\sin\omega_0 t)}{dt} = A\omega_0\sin\omega_0 t + A\omega_0^2 t\cos\omega_0 t$$

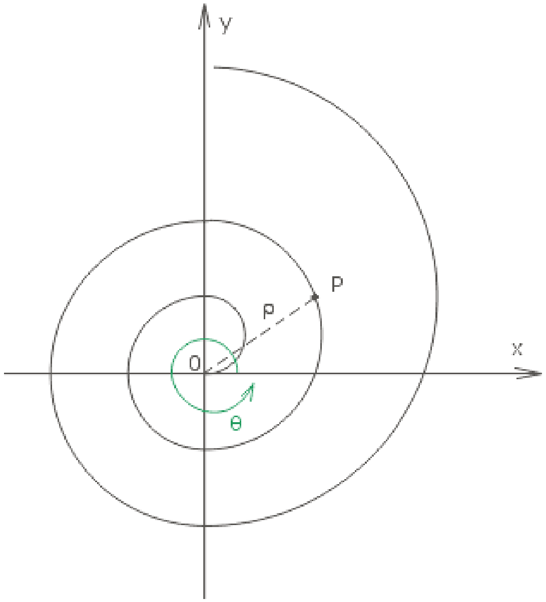
$$V_y = A\omega_0\,(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t)$$





- ## *Application 1*

On considère un mouvement se faisant sur une trajectoire spirale d'équation $\rho = A\,\theta$



Le mouvement se fait à vitesse angulaire constante ω_0

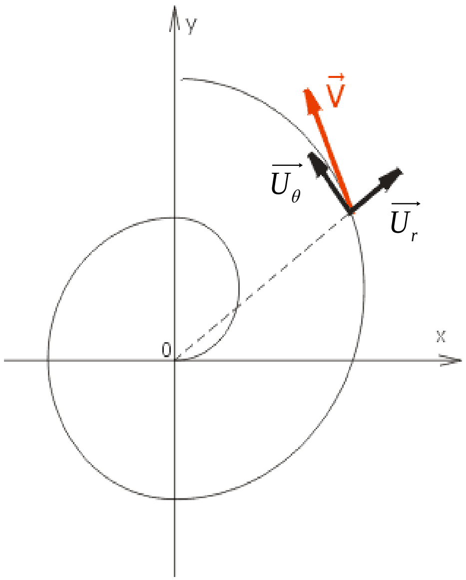
2. Quel est le vecteur vitesse dans les deux représentations ?

Coordonnées polaires: $r = A\omega_0 t \quad , \quad \theta = \omega_0 t$

$$V_r = \dot{r} = \dot{\rho} = A\omega_0$$

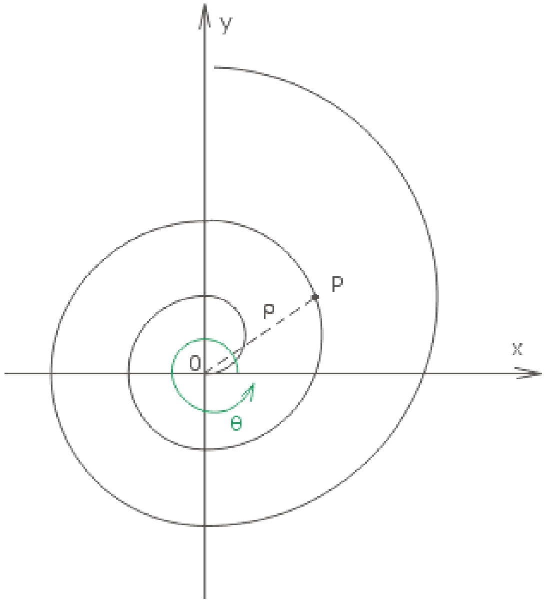
$$V_\theta = r\dot{\theta} = \rho\,\dot{\theta} = A\omega_0^2 t$$

$$\vec{V} = V_r\,\overrightarrow{U_r} + V_\theta\,\overrightarrow{U_\theta}$$



- ***Application 1***

On considère un mouvement se faisant sur une trajectoire spirale d'équation $\rho = A\,\theta$



Le mouvement se fait à vitesse angulaire constante ω_0

2. Quel est le vecteur accélération dans les deux représentations ?

Coordonnées cartésiennes:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d\left(A\omega_0 \cos\omega_0 t - A\omega_0^2 t \sin\omega_0 t\right)}{dt}$$

$$= -A\omega_0^2\left(2\sin\omega_0 t + \omega_0\, t\cos\omega_0 t\right)$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d\left(A\omega_0 \sin\omega_0 t + A\omega_0^2 t \cos\omega_0 t\right)}{dt}$$

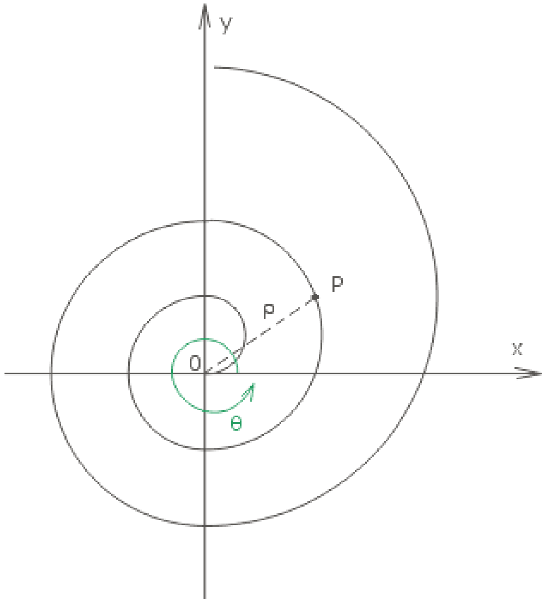
$$= A\omega_0^2\left(2\cos\omega_0 t + \omega_0\, t\sin\omega_0 t\right)$$

➢ *Application 1*

On considère un mouvement se faisant sur une trajectoire spirale d'équation $\rho = A\,\theta$

Le mouvement se fait à vitesse angulaire constante ω_0

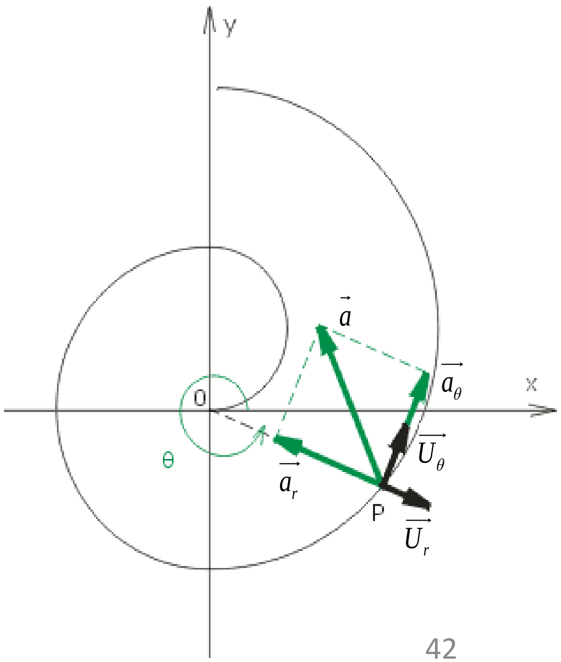
2. Quel est le vecteur accélération dans les deux représentations ?



Coordonnées polaires: $r = A\omega_0 t \quad , \quad \theta = \omega_0 t$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -A\omega_0^3 t$$

$$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = 2A\omega_0^2$$



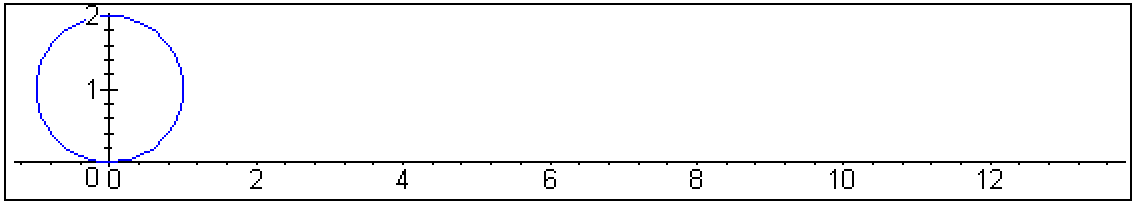
➢ *Application 2*

On considère le mouvement d'une particule caractérisée par les équations paramétriques suivantes:

$$x = r(\omega t - \sin \omega t)$$

$$y = r(1 - \cos \omega t)$$

$$z = 0$$



1. Déterminer les composantes cartésiennes de la vitesse et de l'accélération

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = r(w - \omega \cos \omega t) = rw(1 - \cos \omega t) \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = r(0 + \omega \sin \omega t) = rw \sin \omega t \end{cases}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = rw^2 \sin \omega t \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = rw^2 \cos \omega t \end{cases}$$

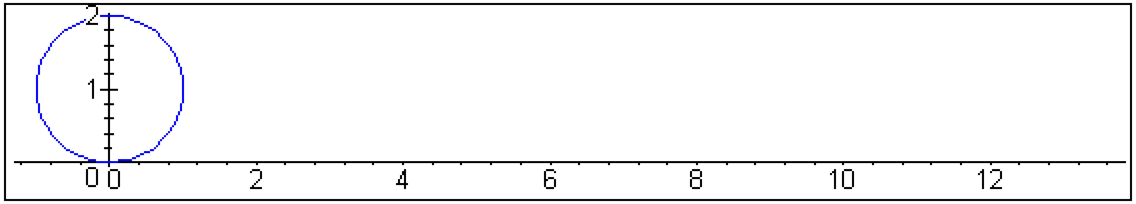
- ***Application 2***

On considère le mouvement d'une particule caractérisée par les équations paramétriques suivantes:

$$x = r(\omega t - \sin\omega t)$$

$$y = r(1-\cos\omega t)$$

$$z = 0$$



2. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frenet

On a : $\vec{V} = V\,\vec{T}$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2(1-\cos\omega t)^2 + r^2\omega^2\sin^2\omega t} = r\omega\sqrt{1-2\cos\omega t+\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}$$

$$r\omega\sqrt{2(1-\cos\omega t)} = 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}$$

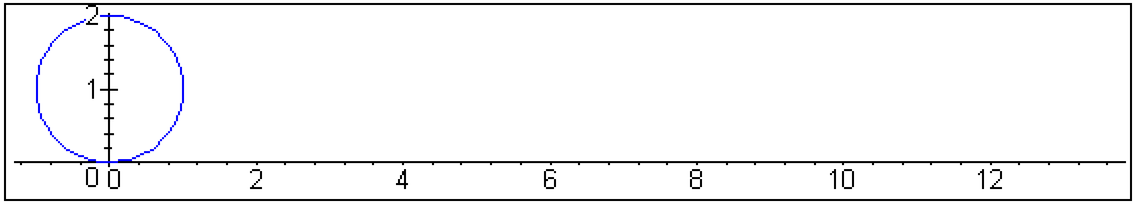
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\vec{V} = 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}\,\vec{T}$$

➢ *Application 2*

On considère le mouvement d'une particule caractérisée par les équations paramétriques suivantes:

$$x = r(\omega t - \sin \omega t)$$
$$y = r(1 - \cos \omega t)$$
$$z = 0$$



2. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frenet

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

$$\vec{a} \quad \rightarrow \quad a_T \,,\, a_N$$

$$a_T = \frac{dV}{dt} = r\omega^2 \cos\frac{\omega t}{2}$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{r^2\omega^4 - r^2\omega^4 \cos^2\frac{\omega t}{2}} = \sqrt{r^2\omega^4 \sin^2\frac{\omega t}{2}} = r\omega^2 \sin\frac{\omega t}{2}$$

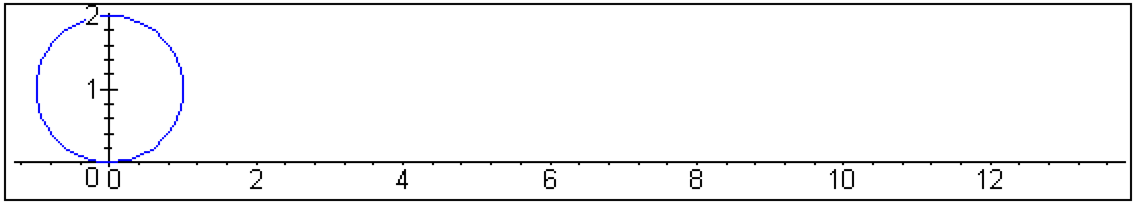
➢ Application 2

On considère le mouvement d'une particule caractérisée par les équations paramétriques suivantes:

$$x = r(\omega t - \sin \omega t)$$

$$y = r(1 - \cos \omega t)$$

$$z = 0$$



3. Déterminer le rayon de courbure

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{4r^2\omega^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}}{r\omega^2 \sin \frac{\omega t}{2}} = 4r \sin \frac{\omega t}{2}$$