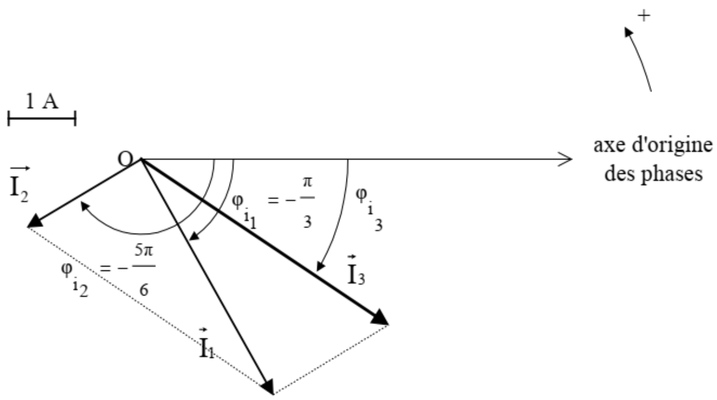
Solution td 1 en ELT

- vecteurs de Fresnel

Loi des nœuds : $\vec{I_3} = \vec{I_1} - \vec{I_2}$



Graphiquement :

$I_3 \approx 4{,}5A$
$\varphi_{i3} \approx -33° \approx -0{,}58$ rad
d'où $i_3(t) \approx 4{,}5\sqrt{2}\,\sin(\omega t - 0{,}58)$

Finalement: $i_3(t) = 4{,}472\sqrt{2}\,\sin(\omega t - 0{,}584)$

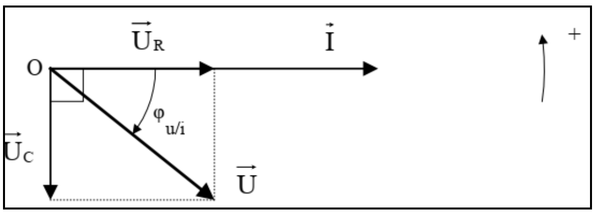
$\varphi_{i1/i2} = -\pi/3-(-5\pi/6) = +\pi/2 = +90°$: i_1 est en quadrature avance sur i_2
$\varphi_{i2/i3} = -5\pi/6-(-0{,}584) = -2{,}034$ rad $= -116°$
$\varphi_{i1/i3} = \varphi_{i1/i2} + \varphi_{i2/i3} = -0{,}463$ rad $= -26°$

- nombres complexes

$$\underline{I_3} = \underline{I_1} - \underline{I_2} = (4,-\frac{\pi}{3}) - (2,-\frac{5\pi}{6}) = (2-2\sqrt{3}j) - (-\sqrt{3} - j)$$
$$= 2 + \sqrt{3} + (1 - 2\sqrt{3})\, j = (4{,}472\ ;\ -0{,}584 \text{ rad})$$

Exercice n2

1) $\vec{U} = \vec{U_C} + \vec{U_R}$



Par définition : $Z_{eq} = \frac{U}{I}$

Théorème de Pythagore : $U^2 = U_R^2 + U_C^2$

Avec : $U_R = RI$ et $U_C = \frac{I}{C\omega}$

D'où : $Z_{eq}{}^2 = \frac{U^2}{I^2} = R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2$

Finalement : $Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$\tan\varphi = -\frac{U_C}{U_R} = -\frac{1}{RC\omega}$

soit : $\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$

Le déphasage φ est compris entre –90° et 0°.

2) $\underline{Z}_{eq} = R - \frac{J}{C\omega}$

$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$\tan\varphi = \frac{-\frac{1}{C\omega}}{R}$ d'où : $\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$

3) Loi d'Ohm : $I = \frac{U}{Z_{eq}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 2{,}66\ \text{mA}$

$\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right) = -58° = -1{,}01\ \text{rad}$

$U_R = RI = 2{,}66\ V$

$U_C = \frac{I}{C\omega} = 4{,}23\ V$

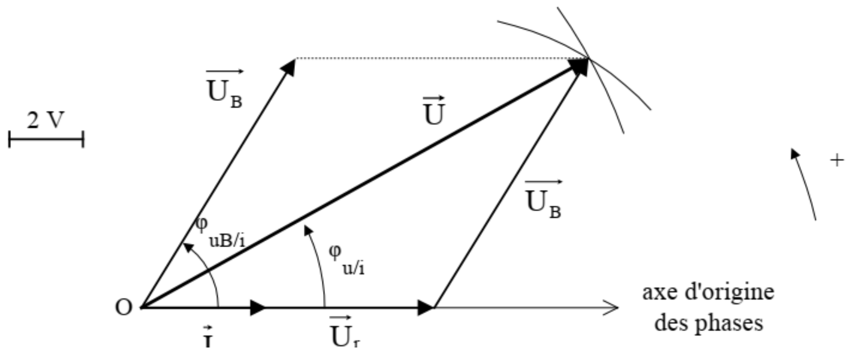
On remarque que : $U \neq U_R + U_C$

Les valeurs efficaces ne s'additionnent pas (sauf cas particulier).

$U_R = U_C \Rightarrow RI = \frac{I}{C\omega}$ soit : $RC\omega = 1$

$f = \frac{1}{2\pi RC} = 15{,}9\ \text{kHz}$

Exercice n3



1) Loi d'Ohm : $U_r = r\,I$
A.N. I = 1 A

2) Construction de Fresnel :
a) $\vec{U} = \vec{U_r} + \vec{U_B}$

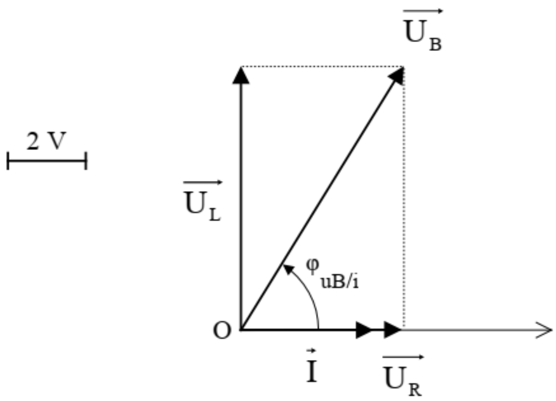
Dans le triangle délimité par les trois vecteurs :
$U_B{}^2 = U^2 + U_r{}^2 - 2UU_r \cos\varphi_{u/i}$

$$\cos\varphi_{u/i} = \frac{U^2 + U_r^{\ 2} - U_B^{\ 2}}{2UU_r} = 0{,}875$$

$\varphi_{u/i} \approx +29°$

Pour des raisons de symétrie : $\varphi_{uB/i} = 2\varphi_{u/i} \approx +58°$

b) $\overrightarrow{U_B} = \overrightarrow{U_R} + \overrightarrow{U_L}$



$U_R = U_B \cos\varphi_{uB/i} = 4{,}25$ V

$$R = \frac{U_R}{I} = 4{,}25\,\Omega$$

$U_L = U_B \sin\varphi_{uB/i} = 6{,}78$ V

$$L = \frac{U_L}{\omega I} = 21{,}6\text{ mH}$$

Exercice n4

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}$$

$$Y_{eq} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

$$\varphi_{u/i} = -\arg \underline{Y} = -\arctan\left(\frac{-\frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}}\right) = \arctan\left(\frac{R}{L\omega}\right)$$

Applications numériques

$I_R = U/R = 0{,}43$ mA

$$I_L = \frac{U}{L\omega} = 0{,}33\text{ mA}$$

$I = Y_{eq}U = 0{,}54$ mA

$\varphi_{u/i} = +37°$

$\varphi_{iL/i} = \varphi_{iL/u} + \varphi_{u/i} = -90 + 37 = -53°$

$\varphi_{i/iR} = \varphi_{i/u} = -37°$

$$\tan\varphi_{u/i} = \frac{R}{L\omega}$$

Si $\varphi_{u/i} = 45°$ alors $\frac{R}{L\omega} = 1$

soit : $f = \frac{R}{2\pi L} = 11{,}5$ kHz

Solution td 1 en ELT

Exercice n5

$$\underline{Z}_{eq} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\varphi_{u/i} = \arg \underline{Z} = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

$$\varphi_{u/i} = 0 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \qquad \text{et : } \underline{Z}_{eq} = R$$

A la résonance, le circuit a un comportement purement résistif.

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \text{ d'où : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$U = Z_{eq}I \qquad \text{et : } U_C = \frac{I}{C\omega} \qquad \text{donc : } Q = \frac{1}{Z_{eq}C\omega}$$

$$\text{A la résonance : } Q_0 = \frac{1}{RC\omega_0}$$

A.N. $\omega_0 = 10^5$ rad/s ; $Q_0 = 22{,}7$; $U_{C0} = Q_0U = 114$ V

On dépasse la tension maximale admissible par le condensateur (63 V) : il y a destruction du condensateur (« claquage » du diélectrique).

Exercice n6

$$\underline{Z}_{eq} = (R + jL\omega)//(R - \tfrac{j}{C\omega}) = \frac{(R + jL\omega)(R - \frac{j}{C\omega})}{2R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{R^2 + jR(L\omega - \frac{1}{C\omega}) + \frac{L}{C}}{2R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

$$LC\omega^2 = 1 \Leftrightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \qquad \text{et : } \underline{Z}_{eq} = \frac{R^2 + \frac{L}{C}}{2R}$$

$\underline{Z}_{eq}$ est un réel positif (pas de partie imaginaire) : $\arg \underline{Z}_{eq} = 0$

$\varphi_{u/i} = 0°$: u et i sont en phase.