04

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\arctan u\Big]_0^{x/\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} - 0\right] \quad (\arctan 0 = 0)$$

et ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

remarque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$; $x = \tan\theta \Leftrightarrow \arctan x = \theta$

2) Calculons l'intégrale $\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$; La fct $x \longrightarrow \frac{1}{2+\cos x}$ est définie et continue sur $[0, \pi]$. donc l'intégrale proposée est une intégrale définie

D'après le changement de variable donné $(\tan\frac{x}{2} = t)$, il vient : $dt = \frac{1}{2}\,\frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}\right)dx = \frac{1}{2}\left[1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}(1+t^2)\,dx$$

$\Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. et on a $\cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

et $\frac{1}{2+\cos x} = \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$

$$= \frac{1+t^2}{3+t^2}$$

puis on obtient $\frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\,dt}{\cancel{1+t^2}} \times \frac{\cancel{1+t^2}}{3+t^2} = \frac{2}{3+t^2}\,dt$