

INTRODUCTION

Les opérations financières se sont développées et multiplient avec l'émergence de nouvelles pratiques bancaires et aussi de nouveaux produits financiers. Alors, les entreprises et les ménages, ayant un besoin ou un surplus financier, s'orientent vers les banques avec un seul mot d'ordre l'intérêt.

Le cours de mathématiques financières comprend des techniques pour des opérations diverses qui tournent autour des taux d'intérêt. Ce taux représente la rémunération du bailleur de fond.

Aujourd'hui, les intervenants n'ont plus besoin des vieilles méthodes de calcul, au contraire, il existe des logiciels qui résoudront toutes les difficultés rencontrées.

Les mathématiques financières exigent une double compétence, notamment en mathématiques (les suites, les séries, les équations, les logarithmes,...) et en finance (mode de financement, choix des investissements, système de crédit, cashflow,...).

Ce cours comprend deux importants axes, à savoir :

Axe 1 : les opérations à court terme avec le principe de l'intérêt simple. Ce type d'opérations regroupe des études sur le calcul de l'intérêt, l'escompte et le compte courant.

Axe 2 : les opérations à long terme avec le principe de l'intérêt composé et qui s'applique sur l'amortissement des emprunts et le choix des investissements.

AXE I : OPERATIONS FINANCIERES A COURT TERME

Fiche 1 : Intérêt simple

1. Définitions et justification de l'intérêt

1.1. Définition de l'intérêt

L'intérêt peut être défini comme la rémunération d'un prêt. C'est le prix à payer par l'emprunteur au prêteur, pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent pendant une période de temps.

Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt :

- La somme prêtée,
- La durée du prêt,
- et le taux auquel cette somme est prêtée.

Il y a deux types d'intérêt : l'intérêt simple et l'intérêt composé.

Exemple 1 :

AMINE prête à Mohammed la somme de 200.000 DA pour six mois et après cette période, ce dernier remet à AMINE le montant prêté plus l'intérêt calculé.

Exemple 2 :

NABIL emprunte SALIM pour l'achat d'un bien. Il rembourse ce prêt en faisant 36 paiements mensuels de 7 000 DA. Donc l'intérêt versé est de $I = 55\,130\text{DA}$.

1.2. Arguments Justificatifs sur l'existence de l'intérêt

Plusieurs raisons ont été avancées pour justifier l'existence et l'utilisation de l'intérêt, parmi lesquelles on peut citer :

- La privation de consommation ;
- La prise en compte du risque ; à cause de :

* l'insolvabilité de l'emprunteur

* l'inflation

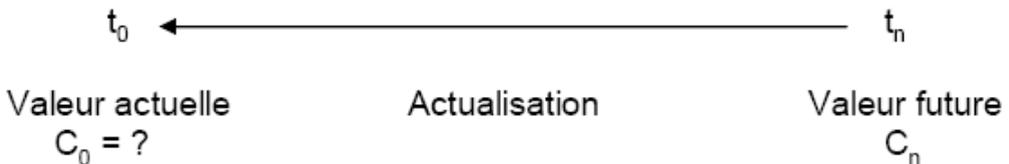
1.3. Les notions : Actualisation et capitalisation

A partir des éléments précédents, le taux d'intérêt apparaît comme le taux de transformation de l'argent dans le temps. Cette relation entre temps et taux d'intérêt signifie que deux sommes d'argent ne sont équivalentes que si elles sont égales à la même date.

Dès lors, pour pouvoir comparer deux ou des sommes disponibles à différentes dates, le passage par les techniques de calcul actuariel (capitalisation et actualisation) devient nécessaire.

A. Actualisation :

L'actualisation est une technique qui consiste à faire reculer dans le temps une valeur future pour calculer sa valeur présente appelée Valeur Actuelle. La valeur actuelle C_0 d'une somme d'argent C_1 disponible dans une année et placée au taux t . Dès lors, la valeur actuelle C_0 d'une somme d'argent C_n disponible dans n années d'intervalle et placée au taux t est égale à : la capitalisation.



B. Capitalisation :

Contrairement à l'actualisation, la capitalisation consiste à faire avancer dans le temps une valeur présente pour calculer sa valeur future appelée aussi Valeur Acquise.

La valeur acquise C_1 d'une somme d'argent présente C_0 capitalisée au taux t pendant une année. Dès lors, la valeur future C_n d'une somme d'argent présente C_0 disponible après n années et placée au taux t est égale à capitalisation

$$I = Ctn/100$$

L'intérêt est fonction de :

t : le taux d'intérêt ;

n : la durée du placement ;

C : le capital.

Exemple :

Soit un capital de 100 000 DA placé durant 1 an au taux annuel de $t = 3\%$, le montant des intérêts perçus par l'investisseur au terme de l'année est de :

$$I = 100000 \times 3 \times 1 / 100 = 3\ 000\ \text{DA}$$

Les éléments de l'intérêt simple

La valeur initiale : C_0 C est le la somme du capital emprunté.

Le montant de l'intérêt varie selon l'importance du capital.

Le taux d'intérêt : t Le taux d'intérêt est l'intérêt payé (ou rapporté) par période de prêt (ou le placement) d'un capital. Dans la pratique, ce taux est généralement exprimé en pourcentage ($t = \dots\%$) et pour une période annuelle.

La durée : n Cette donnée obéit à des conventions précises mais évolutives en fonction du type de prêt ou de placement. Il est donc nécessaire de toujours se faire préciser quelles sont les conventions adoptées si l'on veut avoir une idée précise de ce que représente véritablement le taux d'intérêt d'une opération.

2.3. Les Intérêts précomptés et le taux effectif

Les intérêts étant calculés par la formule précédente, deux modes de versement ou de paiement des intérêts sont possibles :

Les intérêts post-comptés (ou terme échu)

Les intérêts sont dits post-comptés, quand ils sont comptés en fin de période. L'emprunteur dispose de C_0 en début d'emprunt et rembourse C_n en fin d'emprunt.

$$C_n = C_0 (1 + t \cdot n/100) \text{ Quant à la valeur actuelle } C_0 = C_n / (1 + t \cdot n/100)$$

Exemple 1:

A- Monsieur Karim place pour neuf mois un montant de 25000 DA, au taux de 5%.

La valeur acquise de cette opération à l'échéance est :

$$25000(1 + 5 \cdot 9/1200) = 25937,5 \text{ DA}$$

Exemple 2

B- la somme qu'il peut emprunter aujourd'hui au taux de 7%

S'il ne peut rembourser que 112000 DA après onze mois :

$$\text{La valeur actuelle de 112000 DA} = 112000 / (1 + 7 \cdot 11/1200) = 105246,6 \text{ DA}$$

Les intérêts précomptés sont dits précomptés quand ils sont comptés en début de période.

C'est le cas notamment pour les agios et commission d'escompte qui sont décomptés au moment même de la remise de l'effet. La valeur actuelle sera : La valeur acquise est :

$$C_0 = C_n (1 - t^* \cdot n/100) \quad C_n = C_0 / (1 - t^* \cdot n/100) \quad 10$$

L'intérêt simple est versé soit par avance, au moment du versement du capital, soit lors du remboursement du prêt. Ces deux modalités ne sont pas équivalentes du point de vue financier.

On appelle taux effectif d'intérêt simple, le taux d'intérêt simple avec règlement des intérêts lors du remboursement du prêt. Le taux effectif (vu comme une opération à intérêt post compté) d'une opération à intérêt précompté est donc supérieur au taux d'intérêt annoncé. $t = t^* / (1 - n t^*/100)$

Démonstration :

On a : $C_n C_0 = C_0 t n/100$

Et : $C_n C_0 = C_n t^* n/100$

On déduit :

$C_n t^* n/100 = C_0 t n/100 = C_n (1 - t^* n/100) t n/100$

où : $t = t^* / (1 - t^* n/100)$

Exemple :

Une personne place à intérêts précomptés la somme de 10000 DA pour une durée de 6 mois au taux de 10 %. Quel est le taux effectif de ce placement ?

$t = t^* / (1 - t^* n/1200) = 10 / (1 - 10.6/1200) = 10,526\%$

2.4. Les taux proportionnels

Deux taux sont proportionnels s'ils donnent la même valeur acquise à partir du même capital initial, au bout de la même durée de placement à intérêts simples.

On dit que deux taux t et t_p sont proportionnels s'ils représentent le même système intérêt simple exprimé dans deux unités de temps différentes (par

exemple, $t/12$ est le taux mensuel proportionnel au taux annuel t). Envisageons deux opérations financières :

1) dans la première, le capital C_0 est placé pendant 1 an au taux d'intérêt annuel t_1 . Au bout de 1 an, la valeur acquise est : $C_0 (1 + t_1)$.

2) dans la seconde, le capital C_0 est placé pendant 12 mois au taux d'intérêt mensuel t_{12} . Au bout de 1 an, la valeur acquise est : $C_0 (1 + 12 t_{12})$.

Les 2 valeurs seront égales si : $1 + t_1 = 1 + 12 t_{12}$

Par conséquent, le taux d'intérêt annuel t_1 proportionnel au taux d'intérêt mensuel t_{12} est égal à $12 t_{12}$.

Plus généralement, le taux d'intérêt annuel t (on pose $t_1 = t$) proportionnel au taux d'intérêt t_p par période $1/m$ d'année est égal à $m t_p$. $1 + m t_p = 1 + t$

Les taux les plus utilisés : t semestriel $=1/2 t$ annuel t trimestriel $=1/4 t$ annuel t mensuel $=1/12 t$ annuel t journalier $=1/360 t$ annuel (année financière) t journalier $=1/365 t$ annuel ou t journalier $=1/366 t$ annuel (année civile)

2.6. Intérêt global de plusieurs capitaux

L'intérêt global fourni par plusieurs capitaux tous placés au même taux est donné par la formule : D étant le diviseur fixe attaché à t

$$I_{\text{global}} = \sum C_i n_i / D$$