SectionIII: Cinématique du point matériel: Exemples de mouvement

III-1 Introduction

La cinématique est l'étude de la manière dont un corps se déplace, indépendamment des causes qui produisent ce déplacement.

Cetteétude s'appuie sur les notions d'espace et de temps,dontl'observateur a besoin pour analyser le mouvement des objets.

La cinématique décritcertaines notions relatives aux mouvements des objets, à savoirleurs trajectoires, leurs vitesses et leurs accélérations.Ces trois notions sont définies ou déterminées dans un système de référence.

III-2 Notions importantes de la cinématique

Pour décrire le mouvement d'un objet, Certaines notions ou concepts importants doivent être définis.Il s'agit de:

Point matériel: Le point matériel est défini comme étant un objet sans dimensions spatiales. Cet objet en mouvement peut être considéré comme un point matériel lorsque ses dimensions sont négligeables, devant les distances parcourues par l'objet.

Repère: Pour déterminer la position (localisation) d'un point matériel dans l'espace, il est nécessaire de définir un repère d'espace. Cela consiste à choisir une origine Oet une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, qui représente une norme ou une unité selon les trois direction de l'espace (voir section II).

Référentiel: Il s'agit d'un repère spatial,auquel s'associe un repère temporel (repère + horloge).

Trajectoire: La trajectoire d'un point matériel (M), dans un repère donné,est l'ensemble des positions successives du point M, pendant le mouvementet dans le repère.

III-3 Caractéristiques d’un mouvement

L’étude du mouvement s’effectue de deux manières:

Vectorielle:En utilisant les vecteurs: position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, vitesse $\vec{\mathrm{v}}$ et accélération$\vec{\mathrm{a}}$.

Algébrique:En définissant l’équation du mouvement suivant une trajectoiredonnée.

Pour caractériser le mouvement, il est nécessaire de bien définir ce qui suit:

III-3-a Les équations horaires

Si un point matériel est en mouvement, ses coordonnées varient en fonction du temps. Les variations des coordonnées spatiales (x,y,z),dans le temps, s’appellent les équations horaires du mouvement. Soit:

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

III-3-b La trajectoire

Dans un repère donné, la trajectoire (C) représente le lieu géométrique, constitué par les différentes positions du point matériel (M) et à chaque instant t.

Mathématiquement, unetrajectoire est décrite par une relation entre les coordonnées (x,y,z) du point M, dans laquelle le paramètre temps t n’apparait pas.

III-3-c Vecteur position

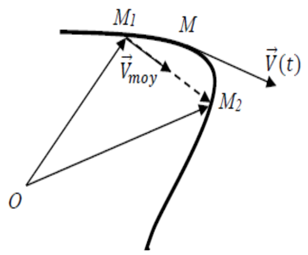
La position d’un point matériel (M)à un tempstest donnée, dans un repère, par unvecteur, dit vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Ce vecteur relie l’origine du repère considéré à la position du point matériel.

III-3-d Vecteur Vitesse

La vitesse, qui est une grandeur vectorielle, est définie par:

III-3-d-i Vitesse moyenne

Lorsqu'un point matériel (M) décrit une trajectoire © dans un Référentiel. Le point occupe la position M_1 à l'instant t et la position M_2 à $t'=t+\Delta t$, la vitesse moyenne entre t et t'est alors donnée par:$\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}$



III-3-d-ii Vitesse instantanée

La vitesse instantanée du point (M)dansle référentiel (R) à un instant t est obtenu en prenant la limite$\Delta t \to 0$.$\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R}$

Les propriétés du vecteur vitesse instantanée sont:

- Son origine qui est la position du point matériel à l'instant t.
- Sa direction qui est tangente à la trajectoire à une position considérée.
- Son sens qui est celui du mouvement à l'instant t.

III-3-e Vecteur Accélération

Les variations de la vitesse avec le temps définissent la notion de l'accélération. Cette accélération est définie par:

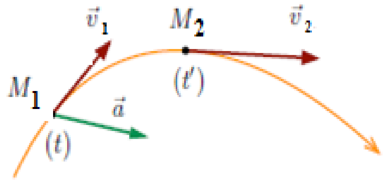
III-3-e-i Accélération moyenne

Soit un point matériel, qui passe à l'instant t_1 par la position M_1 à une vitesse $\overrightarrow{V_1}(t)$ et à l'instant t_2 par la position M_2 à une vitesse $\overrightarrow{V_2}(t)$, sur la trajectoire *C*. Au cours de l'intervalle $\Delta t=t_2-t_1$, la vitesse varie de $\Delta\vec{V} = \overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}$, et l'accélération moyenne vaut:

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

III-3-e-ii Accélération instantanée

Le vecteur accélération instantanée est la dérivée par rapport au temps du vecteurvitesse.Ce qui est équivalent à la dérivée seconde du vecteur position: $\vec{a}(M/_R) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V_2}-\vec{V_1}}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{/R}$



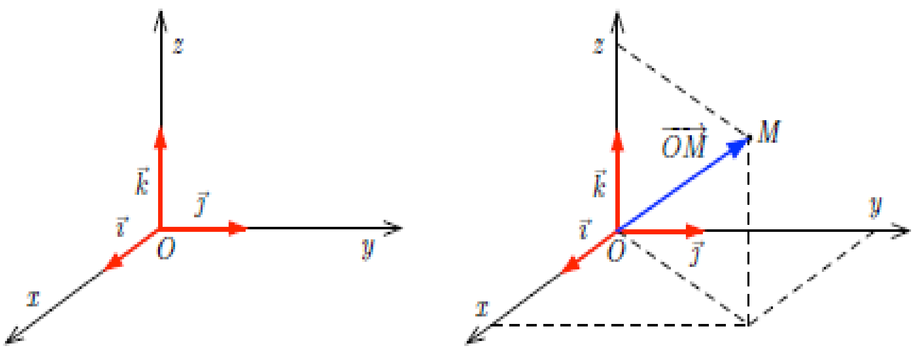
- Le vecteur accélération est toujours orienté vers la partie concave de la trajectoire.
- Le vecteur accélération décrit les variations de la vitesse en grandeur et en direction.

III-3-f Grandeurs cinématique dans un repère cartésien

Dans ce paragraphe, nous allons définir les grandeurs décrites plus haut dans le repères cartésien (O,x,y,z). Pour cela nous devons définir la notion de repère galiléen. Il s'agit d'un référentiel dans lequel un objet libre est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

III-3-f-i Vecteur position

Dans un référentiel galiléen, par exemple le référentiel terrestre, nous pouvons attacher un repèrecartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, dont les vecteurs unitaires de base sont fixes par rapport au référentiel.



(a) base cartésienne (b) vecteur position

Dans la base cartésienne, la position du point (M)est donné par: $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

III-3-f-ii Vecteur vitesse

L'expression du vecteur vitesse dans la base cartésienne se déduit de la relation:

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ de sorte qu'on puisse écrire: $\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$

les notations $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$sont souventutilisées. Le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

III-3-f-iii Vecteur accélération

Le vecteur accélération est défini par : $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dx^2}{d^2t}\vec{\imath} + \frac{dy^2}{d^2t}\vec{\jmath} + \frac{dz^2}{d^2t}\vec{k}$

On peut alors écrire :

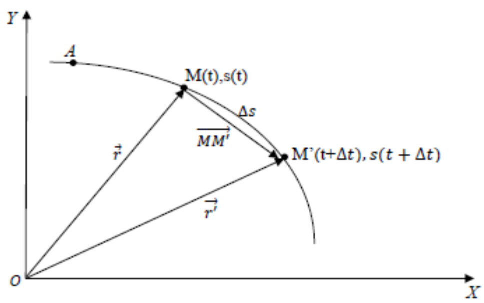
$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{dV_x}{dt} \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} \\ a_{z} = \frac{dV_z}{dt} \end{cases}$$

III-3-g Grandeurs cinématique dans le repère curviligne

III-3-g-i Abscisse curviligne

Soit (M) la position d'un point matériel à l'instant t_1 et la position M'à l'instant t_2.On appelle abscisse curviligne à l'instant t, notée S(t), la longueur de l'arc de la trajectoire:

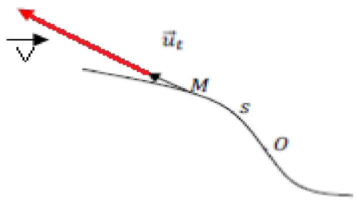
S(t)= S(M) =$\widehat{MM'}(t)$.



III-3-g-ii Vecteur vitesse

L'expression de la vitesse instantanée:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t') - s(t)}{\Delta t}$$



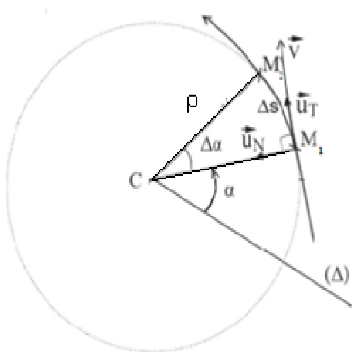
$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Le module s'écrit: $\|\vec{V}\| = \dot{S}(t)$ et le vecteur vitesse s'écrit $\vec{V} = \dot{S}(t)\vec{U_t}$.

III-3-g-iii Vecteur accélération

Par définition, l'accélération est donnée par l'équation suivante:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$



Avec:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_t}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_t}{d\alpha}$$

$\frac{ds}{dt} = v$, $\quad ds = \rho d\alpha \quad$ et $\quad \frac{d\vec{U}_t}{d\alpha} = \vec{U}_n$

$\vec{U}_n$ étant le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{U}_t$

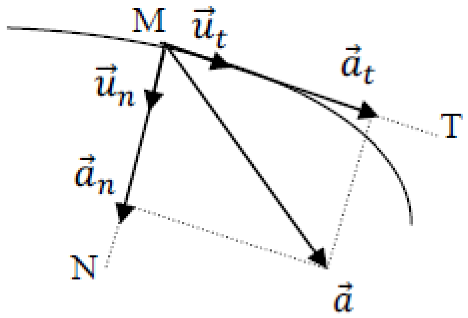
Il en résulte l'expression suivante de l'accélération:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{U}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{U}_n \quad \text{donc} \quad \vec{a}(t) = a_t\vec{U}_t + a_n\vec{U}_n$$

Comme $\vec{U}_t$ et $\vec{U}_n$ sont orthogonaux, le module de l'accélération est: $a = \sqrt{a_t{}^2 + a^2{}_n}$

$\vec{a}_t$: Vecteur tangent à la trajectoire appelé accélération tangentielle, elle indique les variationsdu module de la vitesse au cours du temps.

$\vec{a}_n$: vecteur normale à la trajectoire appelé accélération normale, elle indique les variations de la direction du vecteur vitesse au cours du temps.



Remarque:

Dans le cas d'un mouvement curviligne uniforme$\|\vec{V}\|$=cst⇒ $a_t = 0$, L'accélération se réduit à un seul terme, contrairement au mouvement rectiligne uniforme ou on a aucune accélération,$a_n = \frac{v^2}{\rho}$.

III-5 Grandeurs cinématique dans quelques casdemouvements

	Nature du mouvement	Vitesse instantanée	Accélération instantanée	Equation horaire
Mouvement rectiligne	Rectiligne uniforme	$\vec{V} = \dot{x}\vec{i} = cst$	a = 0	$\frac{dx}{dt} = v$ $\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v\, dt$ $x = vt + x_0$
	Rectiligne Uniformément Accéléré	$\frac{dv}{dt} = a$ $v = at + v_0$	$\vec{a} = cst$	$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$
Mouvement circulaire	Circulaire uniforme	V=R. ω = cst	$a_t = 0$ $a_N = R\omega^2$	$\theta = wt + \theta_0$ $s(t) = R\dot{\theta}$
	Circulaire uniformément accéléré	$\theta = \dot{\theta}t + \dot{\theta}_0$	$a_t = R\ddot{\theta}$ $a_N = R\dot{\theta}^2$	$\theta = \frac{1}{2}\dot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0t + \theta_0$
Mouvement sinusoïdal	Rectiligne sinusoïdal	$\vec{V} = V\vec{i}$	$\vec{a} = a\vec{i}$	$X(t) = X_0cos(\omega t + \varphi)$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$
	Circulaire sinusoïdal	$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$	$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$	$\theta(t) = \theta_0cos(\omega t + \varphi)$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$