SectionII: Calcul vectoriel&systèmes de coordonnées

II-1 Introduction

En mécanique, certaines grandeurs physiques peuvent être complètement déterminées par un simple nombre lie à une unité convenable.Ces grandeurs sont des scalaires.D'autres grandeurs ont besoin d'être orientées selon une direction ou repérées dans un plan à deux dimensions (2D) ou dans l'espaceà trois dimensions (3D).Ces grandeurs sont les vecteurs.

Comme exemples de grandeurs scalaires nous avons le temps, la masse, l'énergie, la température…etc. Pour ce qui des grandeurs nécessitant un repère, nous avons comme exemples la vitesse, l'accélération, la force…etc.

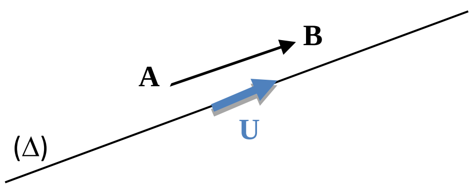
II-2 Les vecteurs

II-2-a Définition

Un vecteur est un segment de droite AB, ayant une origine A et une extrémité B.
Il est caractérisé par:

- Son origine ou point d'application A.
- Sa direction (un support): C'est la droite (Δ)qui le porte.
- Son sens: de A vers B (indiqué par la flèche).
- Son module qui représente la longueur AB, qui est toujours positive et s'écrit$\|\overrightarrow{AB}\|$.

Chaque vecteur peut-être écrit sous la forme:
$\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|.\vec{U}$, $\vec{U}$étant un vecteurunité ou unitaire de module égal à 1.



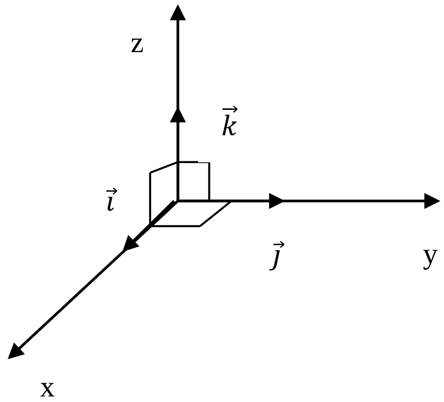
II-2-b Base et propriétés d'un vecteur

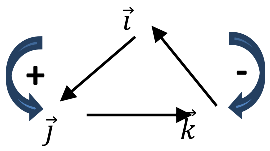
$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est dite base orthonormée si,

1- ses vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

2- en faisant la rotation de $\vec{\imath}$ vers $\vec{\jmath}$, on progresse selon $\vec{k}$. C'est la règle règle du tire-bouchon.

On dit que la base est directe.

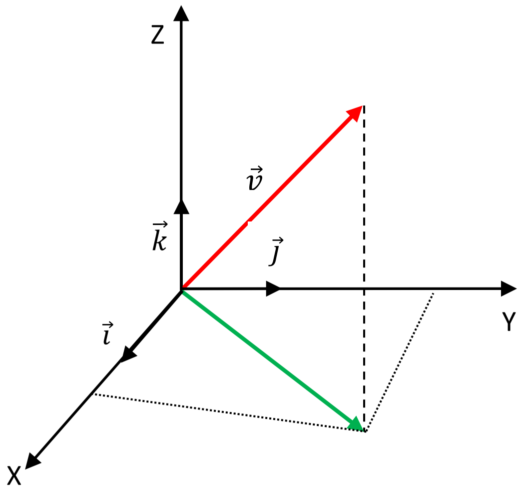




Pour localiser un vecteur dans l'espace à trois dimensions, il faut choisir un repère de base$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et d'origineO.

Un vecteur a des composantes sur la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ qui sont les projections du vecteur $\vec{v}$ sur les trois axes de coordonnées X,Y et Z.

Dans ce repère orthonormé direct, le vecteur $\vec{v}$ est repéré par ses composantes cartésiennes. $\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ ou bien $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



Module d'un vecteur: La norme module d'un vecteur $\vec{V}$ est représentéepar $\|\vec{V}\|$.Dans le repère (O,X,Y,Z), muni d'un système orthonormé$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$,la norme du vecteur est donnée par:$\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Dans le cas d'un vecteur résultant d'une somme ou une différence, le module du vecteur résultant $\vec{A}\pm\vec{B}$ est donné par:

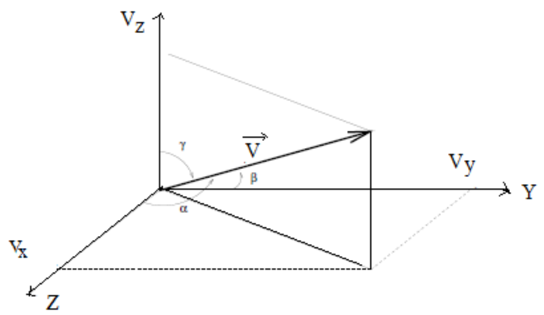
$$\|\vec{A} \pm \vec{B}\| = \sqrt{\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 \pm 2\vec{A}\vec{B}} = \sqrt{\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 \pm 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos\theta}$$

Cosinus directeurs d'un vecteur: Soient α, β et γ , les angles que fait le vecteur $\vec{V}$ avec les directions positives des axes de cordonnées. Si le vecteur $\vec{V}$ s'exprime de la façon suivante :$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$, alors les cosinus directeurs sont:

$$a = \cos\alpha = \frac{\vec{V}.\vec{\imath}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_x}{\sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2}}$$

$$b = \cos\beta = \frac{\vec{V}.\vec{\jmath}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_y}{\sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2}}$$

$$c = \cos\gamma = \frac{\vec{V}.\vec{k}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_z}{\sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2}}$$



a, b et c sont les coordonnées cartésiennes du vecteur unitaire $\vec{V}$ qui vérifient la relation suivante: $a^2 + b^2 + c^2 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$

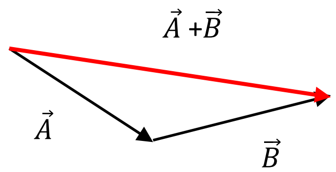
II-2-c Opérations simples sur les vecteurs

II-2-c-i Somme et soustraction de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs peut se calculer graphiquement par deux méthodes:

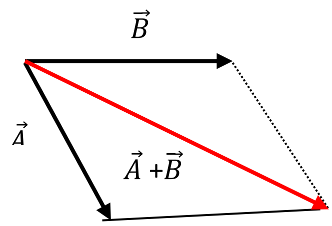
1ère méthode:

Par le triangle. Il suffit de prendre l'extrémité d'un vecteur et le placer à l'origine du deuxième vecteur. Réunir par la suite l'originedu premier vecteur à l'extrémité du deuxième.



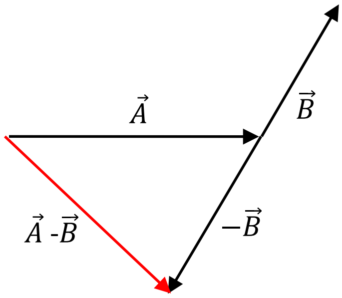
2ème méthode:

Par le parallélogramme. Placer les origines des vecteurs ensemble.Compléter le parallélogramme.Le vecteur somme estreprésentépar la flèche qui a comme point de départ



l'originedes deux vecteurs initiaux et le sommet opposé du parallélogramme.

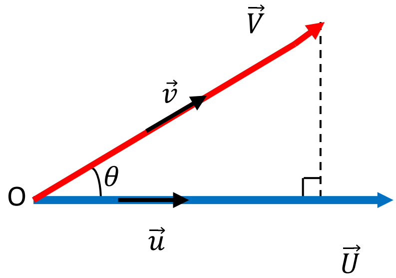
La soustraction de deux vecteurs se fait de la même façon que l'addition en prenant l'opposé du vecteur$\vec{B}$.



II-2-c-ii Produits scalaire de deux vecteurs

Produit scalaire:

Soient $\vec{V}$ et $\vec{U}$ deux vecteurs non nuls ayant la même origine Oat faisant un angle θ. $\vec{v}$ et $\vec{u}$étant leurs vecteurs unitaires respectifs. Le produit, dit scalaire, $\vec{V}.\vec{U}$ est un nombre algébriquequi s'écrit:



$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\vec{u}.\|\vec{V}\|.\vec{v} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.cos\theta$$

En considérant les composantes de$\vec{V}$ et $\vec{U}$ $\Rightarrow \vec{V}$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$et $\vec{U}$: $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, l'expression analytique du produit scalaire est: $\vec{V}.\vec{U} = x_1.x_2 + y_1 y_2 + z_1.z_2$

L'angle que font les deux sera donné par : $\cos\theta = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|} = \frac{x_1.x_2+y_1y_2+z_1.z_2}{\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|}$

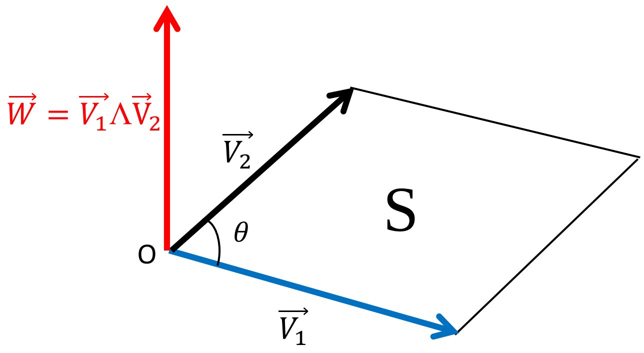
Propriétés du produit scalaire:

- $\vec{V}.\vec{V} = \|\vec{V}\|^2$ **:**le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est égal au carré de sa norme.
- $\vec{V}.\vec{U} = 0$ **:**si l'un des deux vecteurs est nul ou les deux vecteurs sont orthogonaux.
- $\alpha(\overrightarrow{V}.\overrightarrow{U}) = (\alpha.\overrightarrow{V}).\vec{U}$

- $\vec{U}.(\vec{V}+\vec{W})=\vec{U}.\vec{V}+\vec{U}.\vec{W}$: Le produit scalaire est distributif.

II-2-c-iii Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit Vectoriel de deux vecteurs, $\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2$, produit un vecteur $\vec{W}$ tel que:



1-La direction de $\vec{W}$ estperpendiculaire au plan formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V}_2$.

2-Le sens du vecteur résultant est tel que le trièdre $(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{W})$ est direct (règle de la main droite-voir plus loin).

3-La norme de $\vec{W}$ est la surface du parallélogramme, notée **S**sur la figure.

$$\vec{W}=\|\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2\|=\|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|sin\theta$$

II-2-c-iv Propriétés du produit vectoriel – produit mixte:

- Le produit vectoriel est non commutatif: $\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2=-\vec{V_2}\Lambda\vec{V}_1$.
- Le produit Vectoriel est distributif: $\vec{V_1}\Lambda(\vec{V}_2+\vec{V}_3)=\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2+\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_3$
- Si les deux vecteurs sont colinéaire (parallèles) ou l'un des deux nul : $\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2=\vec{0}$.

Le produit vectoriel peut être aussi calculé à partir des coordonnées des vecteurs:

$$\vec{V_1}:\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\vec{V}_2:\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}:\vec{V_1}\Lambda\vec{V}_2=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}+\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k}\\x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}y_1.z_2-y_1.z_2\\x_2.z_1-x_1.z_2\\x_1.y_2-x_2.y_1\end{pmatrix}$$

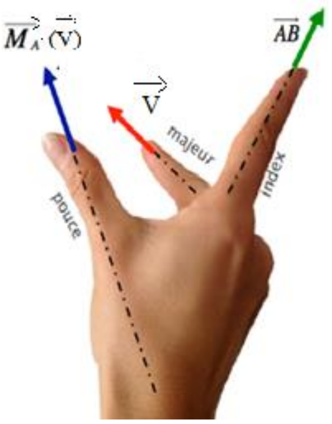
On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1,\vec{V}_2$et $\vec{V}_3$, la quantité scalaire C: $C=\vec{V}_3.(\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2)$, cette quantité est correspond au volume du parallélépipède construit par les trois vecteurs (voir figure ci-haut).

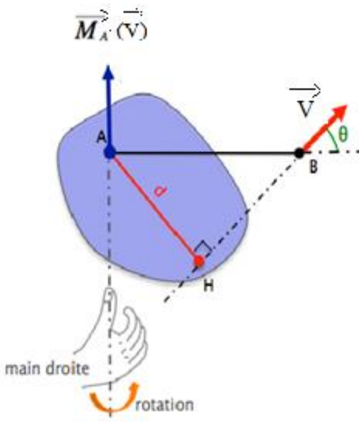
II-2-d Moment d'un vecteur

II-2-d-i Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un point A est le vecteur$\vec{M}_A(\vec{V}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}$. B étant un point de la ligned'action du vecteur $\vec{V}$.Le vecteur moment est perpendiculaire à la fois à $\vec{V}$ et au vecteur$\overrightarrow{AB}$.Son sens est donné par la règle des trois doigts.$\vec{M}_A(\vec{V})$est donné par l'expression:

$$\|\vec{M}_A(\vec{V})\| = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\vec{V}\|.\sin(\overrightarrow{AB},\vec{V}) = V.AB.\sin\theta = V.d$$

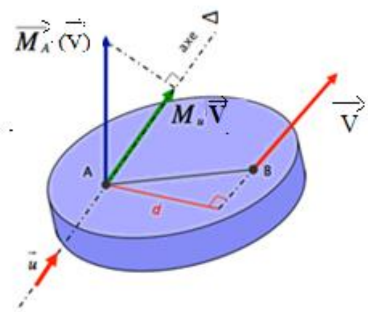




II-2-d-i Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Le moment d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe (Δ) de vecteur unitaire$\vec{u}$et passant par un point Aest égal au produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le moment en A du vecteur $\vec{V}$:

$$M_\Delta(\vec{V}) = \vec{u}.\vec{M}_A(\vec{V}).$$



Le moment du vecteur $\vec{V}$sera nul si l'axe Δlui est parallèle.

II-2-e Dérivée d'un vecteur et règles de dérivation

Soit un vecteur$\vec{V}\ (t)$dans l'espace tridimensionnel:

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{\imath} + V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k}$$

t étant une variable. La dérivée de $\vec{V}\ (t)$ est donnée par: $\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d\,\vec{V}_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\,\vec{V}_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d\,\vec{V}_z}{dt}\vec{k}$

Dans les équations qui suivent, $\vec{V}_1(t), \vec{V}_2(t)$et $\vec{V}_3(t)$sont trois fonctions vectorielles dépendant de t. λ est un scalaire.

1- $\frac{d\left(\vec{V}_1(t)+\vec{V}_2(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} + \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$

2- $\frac{d\left(\lambda\vec{V}(t)\right)}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{V}(t) + \lambda\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$

3- $\frac{d\left(\vec{V}_1(t).\vec{V}_2(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt}\vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t)\frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$

4- $\frac{d(\vec{V}_1(t)\Lambda\vec{V}_2(t))}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt}\Lambda\vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t)\Lambda\frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$