Université d'Oran2 Mohamed Ben Ahmed
جامعة وهران2 محمد بن أحمد

كلية العلوم الاجتماعية- قسم الديموغرافيا

مادة الإحصاء الرياضي وتطبيق الاختبارات الاحصائية

د. راشدي خضرة

المحاضرة 8 و9 : التقدير

تنهيد:

إن عملية استنتاج معلمات المجتمع عن طريق دراسة خواص العينات تسمى بالاستدلال الإحصائي والذي يمكن تقسيمه إلى نوعين: التقدير الاحصائي واختبار الفروض .

مفهوم التقدير : ان الهدف من دراسة اي مجتمع هو استنتاج خصائصه او معالمه كمتوسط المجتمع μ و انحرافه المعياري σ و نسبة صفة معينة في مجتمع p و هي تعتبر اهم معالم المجتمع و هي غالبا ما تكون مجهولة فنقوم بتقديرها . و بما ان العينة صورة مصغرة عن المجتمع الذي سحبت منه ، فاننا نحسب ما يقابل هذه المعالم في العينة اي x ، S وp و ذلك من بيانات العينة اي تقدير معلمة المجتمع μ من احصاءة العينة x *و هكذا..*

و بما اننا نحسب قيمة واحدة من العينة لتقدير معلمة المجتمع المقابلة لها ، فهذا يعني **التقدير بنقطة** .
و بما اننا ايضا نحصل على تقديرات مختلفة من عينات مختلفة و بنفس الحجم يحدث **فرق** بين المعلمة و التقدير و هو ما يسمى **خطا التقدير**(ERREUR DE L'ESTIMATION) . و في هذه الحالة نادرا ما تتساوى قيمتي المعلمة و التقدير لذلك نحدد فترة (مجال) تحتوي على مجموعة من القيم تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع و تسمى هذه الفترة **فترة الثقة** (INTERVALE DE CONFIENCE).
ونرمز لدرجة الثقة بالرمز $(1-\alpha)$ و مكمل هذه القيمة يسمى مستوى المعنوية (α).

اولا: التقدير بنقطة : يمكن ايجاد تقديرات للمعالم الخاصة بالمجتمع من خلال البيانات المأخوذة من عينة عشوائية وذلك بحساب ما يسمى بالإحصاءات، و بما ان أي توزيع احتمالي يحتوى على معالم تحدد شكله فانه في المجتمع الطبيعي يستخدم متوسط العينة العشوائية كتقدير لمتوسط المجتمع وكذلك الانحراف المعياري للعينة يستخدم كتقدير للانحراف المعياري للمجتمع ، في توزيع بواسون يستخدم الوسط الحسابي للعينة كتقدير لمعدل عدد النجاحات في تجربة بواسون ،

أما في توزيع ذات الحدين فيستخدم الوسط الحسابي للعينة كتقدير لنسبة النجاح ... وهكذا

وتسمي هذه التقديرات بالتقدير النقطي حيث أنها قيمة وحيدة محسوبة من العينة.

مثال تطبيقي:

اذا سحبنا عينة عشوائية من 6طلاب اعمارهم كالاتي : 22،25 ، 24.6، 26، 23.9، 27.4 . قدر متوسط و انحراف المجتمع الذي سحبت منه العينة .

ثانياً : التقدير بفترة : من الصعب جداً الحصول على تقدير لمعلمة مجتمع ما دون الوقوع في الخطأ مهما كان هذا التقدير جيداً، ولذلك فإنه من المرغوب فيه إعطاء فترة معينة نتوقع أن تقع معلمة المجتمع بداخلها . إن مثل هذا النوع من التقديرات يسمى تقدير بفترة أو فترة ثقة ومع أنّ دقة التقدير تزداد بزيادة حجم العينة فأنه ليس هناك سبب يبرر إمكانية الحصول على تقدير يحدد معلمة المجتمع بدون خطأ .

1- فترة الثقة لمتوسط المجتمع :

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية بحجم n مأخوذة من توزيع طبيعي (μ , σ^2) للحصول على فترة الثقة نعتبر الحالات التالية:

الحالة الأولى: إذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم، فإن فترة الثقة 100%(1-α) للمعلمة μ تكون على الشكل التالي:

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

يمكن كتابة هذه الفترة بشكل آخر كالتالي:

$$\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث :

$\bar{X}$: هو الوسط الحسابي للعينة

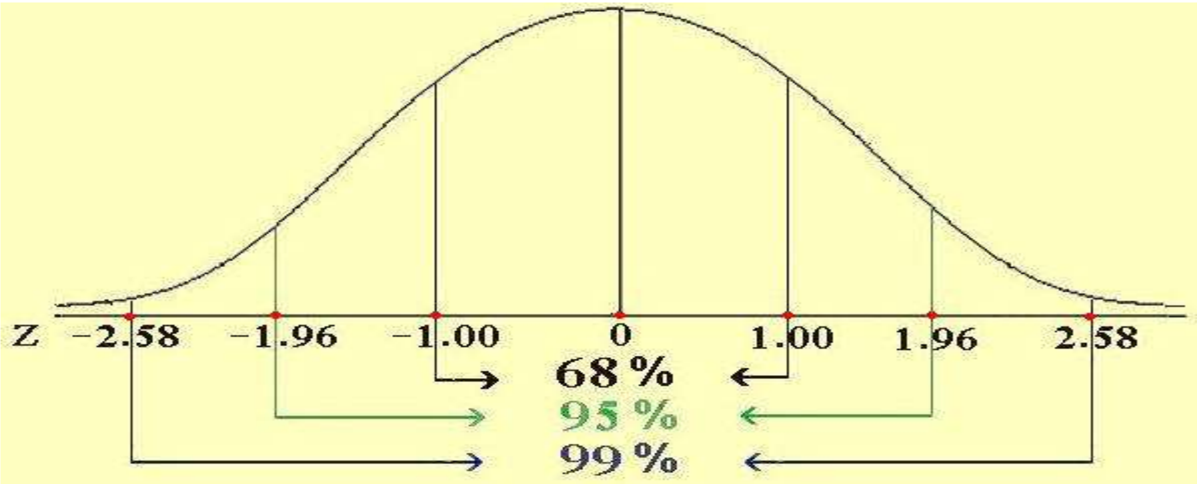
$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ نقطة حرجة تقرأ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وتعتمد على قيمة α التي تحسب من مستوى الثقة بالفترة.

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ الانحراف المعياري لِ $\bar{X}$

ملاحظة : المقدار $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ يمثل الخطأ في تقدير المعلمة μ بوسط العينة $\bar{X}$. أي أن هامش الخطأ في التقدير هو:

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

و كما نعلم في هذه الحالة فإن $\bar{x}$ تتبع التوزيع الطبيعي الذي و سطه μ و انحرافه المعياري $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ وعليه نستخدم هذا التوزيع الاحتمالي في تقدير متوسط المجتمع μ حيث يكون رسم منحنى التوزيع كالتالي :



و من الشكل يصبح لدينا :

$$p[\bar{x}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]=0.95$$

حيث : تتحدد قيمة $Z_{\alpha/2}$ حسب درجة الثقة (أو مستوى المعنوية) كالتالي :

إذا كانت درجة الثقة هي 90% فإن : $Z_{\alpha/2}=1.65$

إذا كانت درجة الثقة هي 95% فإن: $Z_{\alpha/2}=1.96$

إذا كانت درجة الثقة هي 99% فإن : $Z_{\alpha/2}=2.58$

الحالة الثانية: إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول توجد حالتان:

إذا كان حجم العينة $(n\geq30)$ نستخدم الفترة في الحالة الاولى مع استخدام قيمة S^2 (تباين العينة) بدلاً من تباين المجتمع σ^2 المجهول.

شكل الفترة: $\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

الحالة الثالثة: أذا كان حجم العينة $(n<30)$ تصبح الفترة على الشكل التالي:

$$\bar{X} - t_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

اي نعتمد على توزيع t في حساب فترة الثقة .

مثال تطبيقي :

1- في مستشفى معين اختيرت عينة من 200 مريض و كان المتوسط الحسابي لمرضى العينة هو 42 سنة بانحراف معياري قدره 8سنوات. قدر متوسط أعمار مرضى المستشفى بدرجة ثقة 95%

2- عينة من 100 شخص مأخوذة من مجتمع تباينه 25 ووجدنا ان متوسط اعمار هؤلاء الاشخاص هو 38.2 سنة

اوجد متوسط اعمار افراد هذا المجتمع عند مستوى ثقة 90%

3- اخذنا عينة من مجتمع طبيعي حجمها 15 مريضا وجدنا ان متوسط مدة مرضهم هي 8 سنوات بانحراف معياري قدره 2.1 سنة . قدر المدة المتوسطة للمرض في المجتمع عند مستوى ثقة 99%

4- فترة الثقة لنسبة مجتمع P :

أي إذا كانت P هي نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما سحبت منه عينات كبيرة حجم كل منها n وكانت p هي نسبة هذه الظاهرة في العينات فإنها تتبع توزيعا طبيعيا وسطه P و انحرافه المعياري σ حيث :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} : \text{حجم كبير مجهول} \\ \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{n-1}} \quad : N \text{ مجتمع كبير حجمه} \end{cases}$$

فتكون فترة الثقة بالنسبة لـ P على الصورة التالية :

$$\mathbf{p[p-z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq P \leq p+z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}] = 1-\alpha}$$

مثال تطبيقي : في مدينة معينة سحبت عينة عشوائية من 680 طفلا و وجد أن 300 طفلا يعانون من التسوس أوجد بدرجة ثقة 95% نسبة التسوس عند الأطفال في هذه المدينة.

5- فترة الثقة لتباين مجتمع σ^2 :

إذا كانت $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ عينة عشوائية بحجم n مأخوذة من توزيع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ ، فإن فترة ثقة $(1-\alpha)100\%$ للتباين σ^2 تكون:

$$\frac{(n-1)S^2}{x^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{x^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}$$

حيث S^2 تباين العينة

$x^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}$ و $x^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}$ نقاط تقرأ من جدول توزيع كاي تربيع

مثال تطبقي :

اخترنا عينة من 220 سيدة وجدنا ان الانحراف المعياري لسن الزواج لديهن هو 6 سنوات . قدر تباين مجتمع السيدات عند مستوى ثقة 95%.