Université d'Oran2 Mohamed Ben Ahmed
جامعة وهران2 محمد بن أحمد

كلية العلوم الاجتماعية- قسم الديموغرافيا

مادة الإحصاء الرياضي وتطبيق الاختبارات الإحصائية

ماستر 1 ديموغرافيا اجتماعية

د. راشدي خضرة

المحاضرة 4 و5 نظرية الاحتمالات

الهدف من المحاضرة:

في نهاية هذه المحاضرة سيكون الطالب قادرا على القدرة على استخدام النظرية الاحتمالية وتطبيقاتها وشروطها وتفسير نتائجها بالاعتماد على مجموعة من الأمثلة من تخصصه العلمي.

تمهيد:

غالبا ما تستخدم كلمة في حياتنا اليومية تعبيرا عن التوقعات عن حدوث شيء ما كاحتمال النجاح أو الفشل، أو احتمال ولادة انثى، أو احتمال موت شخص وهكذا. بمعنى أن الاحتمال هو محاولة تقدير فرصة حدوث هذه الحوادث أو عدم حدوثها بدون تأكيد او نفي مطلق لذلك. وفي حالات كثيرة، مجد اننا في حاجة على قياس هذا الاحتمال والذي يقدر رياضيا بين الصفر والواحد بحيث ان الصفر يقيس عدم حدوث الحادثة والواحد حدوثها ويتدرج الاحتمال بين هاتين القيمتين.

وفي هذه المحاضرة سنتناول بالتفصيل كل المفاهيم المتعلقة بالاحتمالات وطرق حسابها.

1- تعريف الاحتمال:

احتمال وقوع حادثة هو القيمة التي تعبر عن فرصة وقوعها ضمن فضاء العينة للتجربة العشوائية.

ورياضيا يكون التعريف التقليدي للاحتمال كالتالي:

احتمال الحادثة A هو مقياس عددي يرمز له بالرمز $P(A)$ ويقيس فرصة وقوع الحادثة A عند إجراء التجربة. وتتراوح قيمة هذا المقياس بين الواحد الصحيح والصفر.

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة لها محدود ويساوي

$n(S)$ فإن احتمال الحادثة A يعرف بالصيغة التالية:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } S}$$

مثال1:

أوجد احتمال الحوادث في مثال تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة.

الحل:

بما أن نتائج تجربة رمي حجر النرد المتزن متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة $n(S) = 6$ محدود فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
$A = \{2, 4, 6\}$	$n(A) = 3$	$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6 = 0.5$
$B = \{1, 3, 5\}$	$n(B) = 3$	$P(B) = n(B)/n(S) = 3/6 = 0.5$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$n(C) = 5$	$P(C) = n(C)/n(S) = 5/6 = 0.8333$
$D = \{6\}$	$n(D) = 1$	$P(D) = n(D)/n(S) = 1/6 = 0.1667$
$\phi = \{\ \}$	$n(\phi) = 0$	$P(\phi) = n(\phi)/n(S) = 0/6 = 0.0$
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$n(S) = 6$	$P(S) = n(S)/n(S) = 6/6 = 1.0$

التعريف التكراري النسبي للاحتمال : لا ينطبق التعريف التقليدي للاحتمال على جميع أنواع التجارب العشوائية. إذ أنه مبني على تساوي الفرص لنتائج التجربة وعلى محدودية عدد عناصر فضاء العينة وهذا لا ينطبق على جميع التجارب العشوائية. لذلك فإننا فيما يلي نعطي تعريفًا آخر للاحتمال وهو ما يسمى بالتعريف التكراري النسبي للاحتمال:

إذا كررنا إجراء تجربة عشوائية n مرة تحت نفس الظروف وكان عدد مرات وقوع الحادثة A في هذه التكرارات يساوي $r_n(A)$ فإن احتمال الحادثة A بناءً على التعريف التكراري النسبي يعطى بالصيغة التالية:

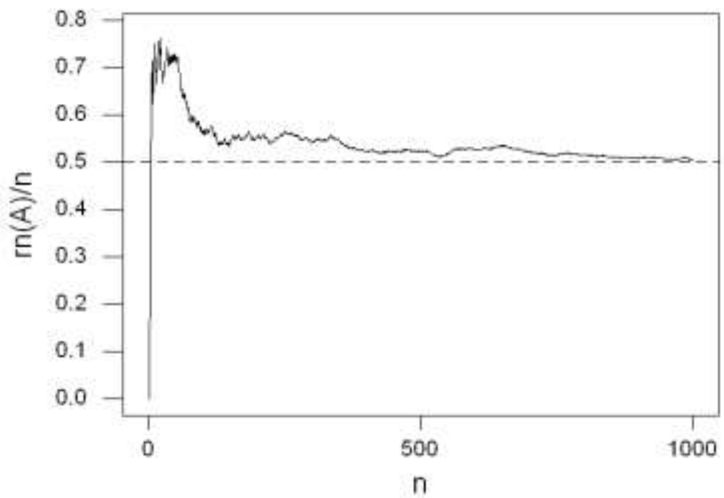
$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n(A)}{n}$$

ويمكن ملاحظة أن $\frac{r_n(A)}{n}$ هو التكرار النسبي لعدد مرات وقوع الحادثة A عند تكرار إجراء التجربة n مرة

وبالتالي فإن احتمال الحادثة A هو هذا التكرار النسبي عندما نكرر إجراء التجربة ما لا نهاية من المرات.

ولو عرفنا الحادثة A على أنها الحادثة الدالة على ظهور الصورة في تجربة قذف العملة المتزنة. ولنفرض أننا كررنا هذه التجربة 1000 مرة وليكن $r_n(A)$ هو عدد مرات ظهور الصورة عند المحاولة رقم n. وباستخدام الحاسب الآلي نحصل على مايلي:

$$P(A) = P(H) = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(A)}{n} = 0.5$$



شكل (1): الاحتمال التكراري النسبي

بالرغم من أن التعريف التكراري النسبي للاحتمال مفيد وعام لأي نوع من أنواع التجارب العشوائية إلا أننا لا نستطيع التأكد من أننا سوف نحصل على النسبة نفسها لو كررنا إجراء التجربة n مرة في وقت آخر. كذلك فإنه من الصعب جدًا تطبيق هذا التعريف لأنه يعتمد على تكرار إجراء التجربة عدد كبير من المرات. كما أن هذا التعريف له بعض الصعوبات من الجهة الرياضية إذ قد لا توجد النهاية. ولهذه الأسباب فقد ظهر التعريف الرياضي للاحتمال والذي يعتمد على بعض المسلمات الأساسية.

2- خصائص الاحتمال:

أ- دالة الاحتمال:

إذا كان لدينا تجربة عشوائية فضاء عينتها هو S فإن الدالة الحقيقية $P(.)$ والمعرفة لجميع الحوادث المعرفة على فضاء العينة S تكون دالة احتمال ويسمى العدد $P(A)$ باحتمال الحادثة A لكل $A \subseteq S$ إذا تحققت

المسلمات التالية:

1. لكل حادثة A يكون: $P(A) \geq 0$.
2. احتمال الحادثة المؤكدة يساوس الواحد، أي أن $P(S) = 1$.
3. إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, A_3, \ldots$ حوادث متنافية (منفصلة) مثنى مثنى (أو تبادليًا) أي إذا كان $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$ فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

وهو ما يعني أن احتمال اتحاد متتالية غير منتهية من الحوادث المتنافية تبادليًا يساوي مجموع احتمالاتها.

وعليه يكون:

1. احتمال الحادثة المستحيلة يساوي الصفر، أي أن:

$$P(\phi) = 0$$

2. إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث متنافية (منفصلة) تبادليًا فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. لأي حادثة A يكون:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

4. لأي حادثتين A و B يكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. لأي حادثتين A و B يكون:

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$$

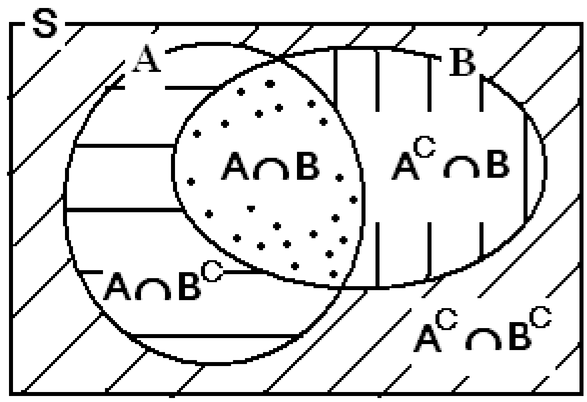
$$\Leftrightarrow$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

6. إذا كان $A \subseteq B$ فإن $P(A) \leq P(B)$

الاحتمالات المتعلقة بحادثتين:

يمكن تمثيل احتمالات الحوادث بالمساحات في شكل فن. فمساحة المستطيل الذي يمثل الحادثة المؤكدة أو فضاء العينة S تساوي الواحد الصحيح. ونمثل احتمال أي حادثة أخرى بمساحة المنطقة التي تمثلها هذه الحادثة في شكل فن منسوبًا إلى المساحة الكلية للمنطقة التي تمثلها الحادثة المؤكد. والشكل التالي يبين بعض الحالات المهمة:



لاستنباط القوانين المتعلقة باحتمالات حادثتين فإننا نحاول تمثيل الحادثة المطلوب إيجاد الاحتمال لها كإتحاد حوادث متنافية لكي نستطيع تطبيق النتيجة الثانية لمسلمات الاحتمال المذكورة أعلاه. فعلى سبيل المثال، القوانين التالية يمكن بسهوله استنباطها:

1. $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C)$
2. $P(B) = P(A\cap B) + P(A^C\cap B)$
3. $P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B)$
4. $P(A^C\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$
5. $P(A\cup B) = P(A) + P(A^C\cap B)$
6. $P(A\cup B) = P(B) + P(A\cap B^C)$
7. $P(A\cup B) = P(A\cap B^C) + P(A\cap B) + P(A^C\cap B)$
8. $P(A^C\cap B^C) = 1 - P(A\cup B)$

مثال1:

في تجربة رمي حجر نرد متزن مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لنعرف الحوادث التالية:

A: الحادثة الدالة على ظهور عدد زوجي

B: الحادثة الدالة على ظهور عدد أقل من أو يساوي 2

والمطلوب هو تعريف الحوادث التالية واحسب احتمالها:

$$A,\ B,\ A\cap B,\ A\cup B,\ A\cap B^C,\ A^C\cap B,\ (A\cup B)^C,\ A^C\cap B^C$$

الحل:

فضاء العينة لهذه التجربة هو $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ وهي تجربة متساوية الفرص وعدد عناصر فضاء العينة محدود ويساوي $n(S) = 6$. نلخص تعريف وحساب احتمالات الحوادث المطلوبة في الجدول التالي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
$A = \{2,4,6\}$	$n(A) = 3$	$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6$
$B = \{1, 2\}$	$n(B) = 2$	$P(B) = n(B)/n(S) = 2/6$
$A\cap B =\{2\}$	$n(A\cap B) = 1$	$P(A\cap B) = n(A\cap B)/n(S) = 1/6$
$A\cup B =\{1,2,4,6\}$	$n(A\cup B) = 4$	$P(A\cup B) = n(A\cup B)/n(S) = 4/6$
$A\cap B^C =\{4,6\}$	$n(A\cap B^C) =2$	$P(A\cap B^C) = n(A\cap B^C)/n(S) = 2/6$
$A^C\cap B =\{1\}$	$n(A^C\cap B) =1$	$P(A^C\cap B) = n(A^C\cap B)/n(S) = 1/6$
$(A\cup B)^C =\{3,5\}$	$n((A\cup B)^C) =2$	$P((A\cup B)^C) = n((A\cup B)^C)/n(S) = 2/6$
$A^C\cap B^C =\{3,5\}$	$n(A^C\cap B^C) =2$	$P(A^C\cap B^C) = n(A^C\cap B^C)/n(S) = 2/6$

كما نلاحظ أنه من الممكن إيجاد احتمالات بعض الحوادث أعلاه باستخدام القواعد التي ذكرناها آنفًا:

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6$

$P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 3/6 - 1/6 =2/6$

$P(A^C\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 2/6 - 1/6 = 1/6$

$P((A\cup B)^C) =1 - P(A\cup B) = 1 - 4/6 =2/6$

$P(A^C\cap B^C) = P((A\cup B)^C) = 1- P(A\cup B) =1 - 4/6 = 2/6$

مثال2–إذا كان احتمال أن يكون أحد الأشخاص اعزبا هو 0.35 واحتمال أن هذا الشخص امي هو 0.15 واحتمال أن هذا اعزب وامي في نفس الوقت هو 0.40. أوجد احتمال أن هذا الشخص:

1. أعزب.

2. امي.

الحل:

لنعرف الحادثتين:

A: اعزب.

B: امي.

المعطيات:

$$P(A\cup B) = 0.40,\quad P(B) = 0.15,\quad P(A) = 0.35$$

المطلوب:

1. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0.35 + 0.15 - 0.40 = 0.10$
2. $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.15 = 0.85$

مثال3: إذا كانت A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة بحيث:

$$P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.4,\ P(A\cup B) = 0.5$$

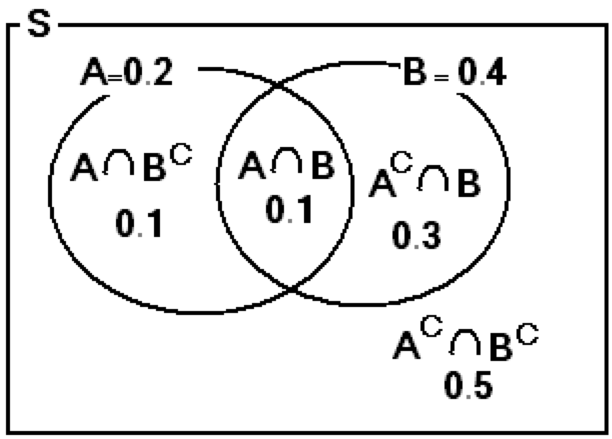
أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(A\cap B),\quad P(A\cap B^C),\quad P(A^C\cap B),\quad P(A^C\cap B^C)$$

الحل:

$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$
$P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 0.2 - 0.1 = 0.1$
$P(A^C\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$
$P(A^C\cap B^C) = P((A\cup B)^C) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$

الشكل التالي يوضح احتمالات الحوادث المطلوبة.



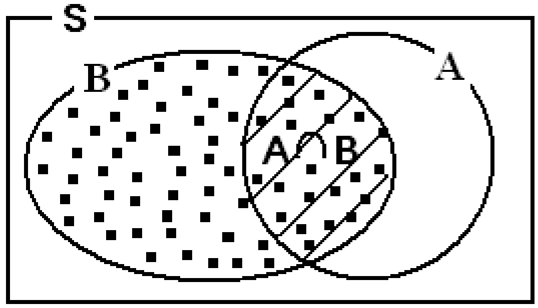
شكل فن يوضح احتمالات الحوادث

الاحتمال الشرطي:

نواجه في كثير من التطبيقات العملية بعض الحالات التي نرغب فيها بإيجاد احتمال حادثة معينة A بعد معرفتنا بوقوع حادثة معينة أخرى B. أي أننا نكون مهتمين بإيجاد الاحتمال الشرطي للحادثة A مشروطاً بوقوع الحادثة B. فمثلاً قد نكون مهتمين بعرفة ما يلي:

1. احتمال وفاة شخص ما أذا علمنا انه مصاب بمرض ما.
2. احتمال أن تنجب امرأة ما طفلا اخر علما ان لديها طفلان
3. احتمال أن يصاب الشخص بالمرض علمًا بأن هذا الشخص قد تم تلقيحه ضد هذا المرض.

يفهم مما سبق أننا نريد إيجاد احتمال الحادثة A منسوبًا إلى فضاء عينة جديد هو فضاء العينة المكون من عناصر الحادثة المشروطة B. و الشكل يوضح فضاء العينة المشروط.



شكل فن يوضح فضاء العينة المشروط

لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S بحيث $P(B) \neq 0$. إن الاحتمال الشرطي للحادثة A علمًا (أو مشروطًا) بوقوع الحادثة B (أو معطى حدوث الحادثة B) يرمز له بالرمز $P(A|B)$ ويعرف كما يلي:

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$$

ملاحظات:

1. مقياس الاحتمال الشرطي $P(\bullet|B)$ يحقق مسلمات الاحتمال ونتائجها.
2. الاحتمال الشرطي للحادثة B معطى A هو:

$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(A\right)}$$

3. بشكل عام فإن: $P(A|B) \neq P(B|A)$

نتائج:

1. إذا كانت عناصر فضاء العينة S متساوية الفرص فإن:

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{n\left(A\cap B\right)/\,n\left(S\right)}{n\left(B\right)/\,n\left(S\right)}=\frac{n\left(A\cap B\right)}{n\left(B\right)}$$

2. الاحتمال الشرطي للحادثة A^C (متممة A) معطى B يمكن حسابه بالقانون التالي:

$$P(A^C|B) = 1 - P(A|B)$$

3. قاعدة الضرب في الاحتمال:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$$
$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$$

مثال :الجدول التالي يصنف أربعمائة شخصًا حسب الجنس والمستوى التعليمي على النحو التالي:

الجنس / المستوى التعليمي		ذكر D	انثى D^C	المجموع
مرتفع	A	40	10	50
متوسط	B	70	130	200
منخفض	C	55	95	150
المجموع		165	235	400

ولتكن التجربة هي اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي. ولنعرف الحوادث التالية:

A : حادثة اختيار شخص مستواه التعليمي مرتفع

D : حادثة اختيار شخص ذكر

المطلوب هو إيجاد احتمال أن الشخص المختار:

1. مستواه التعليمي مرتفع.
2. ذكر.
3. مستواه التعليمي مرتفع و ذكر.
4. مستواه التعليمي مرتفع علمًا بأنه ذكر.

الحل:

عدد نتائج التجربة $400 = \binom{400}{1} = n(S)$ وهي متساوية الفرص.

1. $P(A) = n(A)/n(S) = 50/400 = 0.125$
2. $P(D) = n(D)/n(S) = 165/400 = 0.4125$
3. $P(A \cap D) = n(A \cap D)/n(S) = 40/400 = 0.1$

4. $P(A \mid D) = P(A \cap D) / P(D) = 0.1 / 0.4125 = 0.2424$

أو $P(A \mid D) = n(A \cap D)/n(D) = 40/165 = 0.2424$

الحوادث المستقلة:

في بعض الحالات يكون احتمال حدوث حادثة معينة A لا يتأثر مطلقًا بحدوث أو عدم حدوث حادثة أخرى B. أي لا فرق بين احتمال الحادثة A والاحتمال الشرطي للحادثة A معطى B. أي أن $P(A|B) = P(A)$.

وفي هذه الحالة نقول بأن الحادثتين A و B مستقلتان.

لدينا:

لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S. يقال بأن الحادثتين A و B مستقلتان إذا تحقق أحد الشروط المتكافئة التالية:

1. $P(A|B) = P(A)$
2. $P(B|A) = P(B)$
3. $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

مثال : هل الحادثتان A و D في مثال السابق مستقلتان؟ ولماذا؟

الحل:

إن الحادثتين A و D في مثال (17) غير مستقلتين وذلك لأن (يكفي التحقق من أحد الشروط):

1. $P(A) = 0.125 \neq P(A|D) = 0.2424$
2. $P(A \cap D) = 0.1 \neq P(A)\,P(D) = 0.125 \times 0.4125 = 0.0516$
3. $P(D) = 0.4125 \neq P(D|A) = 0.8$

نتيجة :

إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين، فإن:

1. الحادثتين A و B^C مستقلتان.
2. الحادثتين A^C و B مستقلتان.

3. الحادثتين A^C و B^C مستقلتان.

مثال 1: يضم فوج من الطلاب عشر طلاب وعشرين طالبة. سحبت عينة مكونة من طالبين من هذا الفوج عشوائيًا. أوجد احتمال أن يكون الطالبان انثى في كلا الحالتين التاليتين:

1. إذا كان السحب بدون إرجاع
2. إذا كان السحب بإرجاع

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

A = { الطالب الأول انثى }

B = { الطالب الثاني ذكر }

$A \cap B$ = { الطالبين كلاهما انثى }

إن المطلوب هو إيجاد $P(A \cap B)$. وسوف نوجد هذا الاحتمال لكلا الحالتين بطريقتين مختلفتين هما: (1) قاعدة الضرب للاحتمال و (2) قاعدة التباديل.

أولاً: باستخدام قاعدة الضرب للاحتمال $P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A)$:

1. حالة السحب بدون إرجاع:

$$P(A) = \frac{20}{30}$$

$$P(B \mid A) = \frac{19}{29}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = \frac{20}{30} \times \frac{19}{29} = 0.4368$$

2. حالة السحب بإرجاع:

$$P(A) = \frac{20}{30}$$

$$P(B \mid A) = \frac{20}{30}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = \frac{20}{30} \times \frac{20}{30} = 0.4444$$

ثانياً: باستخدام قاعدة التباديل:

عدد طرق اختيار طالبين من من ثلاثين طالبا = $n(S)$

عدد طرق اختيار طالبتين من عشرين طالبة = $n(A \cap B)$

ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(A \cap B) = n(A \cap B)/n(S)$

1. حالة السحب بدون إرجاع:

$$n(S) = {}_{30}P_2 = 30 \times 29$$

$$n(A \cap B) = {}_{20}P_2 = 20 \times 19$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{20 \times 19}{30 \times 29} = 0.4368$$

2. حالة السحب بإرجاع:

$$n(S) = 30^2 = 30 \times 30$$

$$n(A \cap B) = 20^2 = 20 \times 20$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{20 \times 20}{30 \times 30} = 0.4444$$

مثال 2: يحتوي فوج على عشر طلاب وعشرين طالبة. اخترنا عينة مكونة من 4 طلاب من هذا االفوج عشوائيًا دون مراعاة الترتيب. أوجد احتمال الحصول على ثلاث طلبة ذكور وطالبة واحدة.

الحل:

لنعرف الحادثة A على أنها حادثة الحصول على ثلاث طلاب ذكور وطالبة

عدد طرق اختيار 4 طلاب من ثلاثين طالبا = $n(S)$

عدد طرق اختيار على ثلاث طلاب وطالبةواحدة = $n(A)$

ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(A) = n(A)/n(S)$

$$n(S) = \binom{30}{4}$$

$$n(A) = \binom{10}{3} \times \binom{20}{1}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{3} \times \binom{20}{1}}{\binom{30}{4}} = 0.088$$

نظرية بايز :

لنفرض أن هناك عدد من الأسباب المعينة التي يؤدي وقوع أحدها إلى حدوث حادثة ما. وهذه الحادثة تقع إذا وقع أحد أسبابها. ولنفرض أننا نعلم مسبقًا احتمال تحقق كل سبب من هذه الأسباب وكذلك نعلم الاحتمال الشرطي لهذه الحادثة عند تحقق كل سبب من أسبابها. إن نظرية بايز تعنى بحساب احتمال أن يكون سببًا محددًا من الأسباب هو مصدر حدوث هذه الحاثة والتي نعلم مسبقًا بحدوثها. وقبل استعراض نظرية بايز فإنه لابد من التطرق لما يسمى بقانون الاحتمال الكلي الذي يعنى بحساب وقوع هذه الحادثة بغض النظر عن السبب.

قانون الاحتمال الكلي :

لتكن الحوادث $A_1,A_2,\ldots,A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة على فضاء العينة S، أي أن:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$$

$$A_i \cap A_j = \phi; \forall i \neq j$$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$P(B) = P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B|A_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

قانون بايز :

لتكن الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة على فضاء العينة S، أي أن:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$$
$$A_i \cap A_j = \phi; \quad \forall i \neq j$$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}; \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (14)$$

مثال:

لنفرض أن لدينا مجموعتين. تحتوي المجموعة الاولى على 4 ذكور و 6 اناث، بينما تحتوي المجموعة الثانية على 8 ذكور و 8 اناث. اخترنا مجموعة من هاتين المجموعتين بشكل عشوائي ثم اخترنا منها شخصا واحدا بشكل عشوائي.

1. احسب احتمال أن يكون الشخص انثى.
2. إذا علمنا أن الشخص المختار انثى، فما هو احتمال أن تكون من المجموعة الثانية؟

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

B = { الشخص المختار انثى };

A_1 ={ المجموعة المختارة هي المجموعة الاولى };

A_2 ={ المجموعة المختارة هي المجموعة الثانية };

المعطيات:

$$P(A_1) = 0.5; \quad P(B|A_1) = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$P(A_2) = 0.5; \quad P(B|A_2) = \frac{8}{16} = 0.5$$

المطلوب:

1. $P(B) = \sum_{k=1}^{2} P(A_k)P(B|A_k)$

$$= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2)$$
$$= 0.5\times0.6 + 0.5\times0.5 = 0.3 + 0.25$$
$$= 0.55$$

لاحظ أن $P(B)=0.55$ ، في مثالنا هذا وكحالة خاصة، ما هو إلا المتوسط الحسابي لـ $P(B|A_1)$ و $P(B|A_2)$ وذلك لأن $P(A_1) = P(A_2) = 0.5$.

2. $P(A_2|B) = \dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{k=1}^{2} P(A_k)P(B|A_k)}$

$$= \frac{0.5 \times 0.5}{0.55} = \frac{0.25}{0.55} = 0.4545$$