*Université d'Oran 2*
*Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle*
*Département de Maintenance en Instrumentation*
*Master 1: Génie Industriel*

# Mathématique pour l'Automatique

## Cours III

## Stabilité et performances des systèmes continus LTI

**Chargée de module:**

**Mme BENMANSOUR . S**

**2018/2019**

# *Contenu du cours III*

1. ***Introduction***
2. ***Analyse de la stabilité d'un système asservi***
3. ***Précision des systèmes asservis***
4. ***Performances dynamiques.***

# *Introduction*

## *1. Types d'asservissement*

- **Régulation** : consigne $y_c$ constante
- **Poursuite de trajectoire** : consigne $y_c$ variable

## *2. Objectifs de l'asservissement*

- **Stabilité** du système asservi
- **Précision** : en régime permanent, la sortie doit suivre la consigne
- **Rapidité** : Le système asservi doit répondre le plus rapidement possible aux variations de la consigne
- **Rejet des perturbations et des bruits**
- **Robustesse** : le système en BF doit résister aux variations de paramètres, à l'imprécision du modèle H(s)

***Le travail de l'automaticien est de régler convenablement le correcteur pour répondre au mieux à ces exigences***

# *Contenu du cours III*

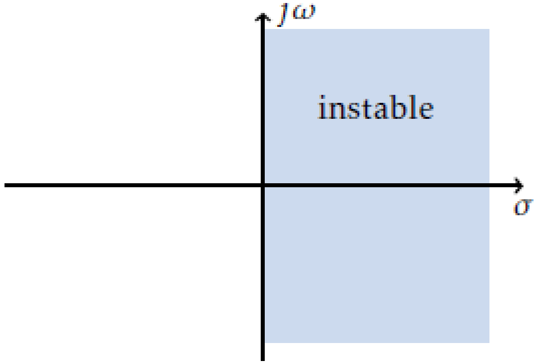
1. *Introduction*
2. ***Analyse de la stabilité d'un système asservi***
3. *Précision des systèmes asservis*
4. *Performances dynamiques.*

# *Analyse de la stabilité d'un système asservi*

## *1. Notion de stabilité : définitions*

➢ **Un système est stable si et seulement si écarté de sa position d'équilibre (point ou trajectoire), il tend à y revenir.**

➢ **Une faible perturbation des conditions initiales du système engendre une faible perturbation de sa trajectoire**



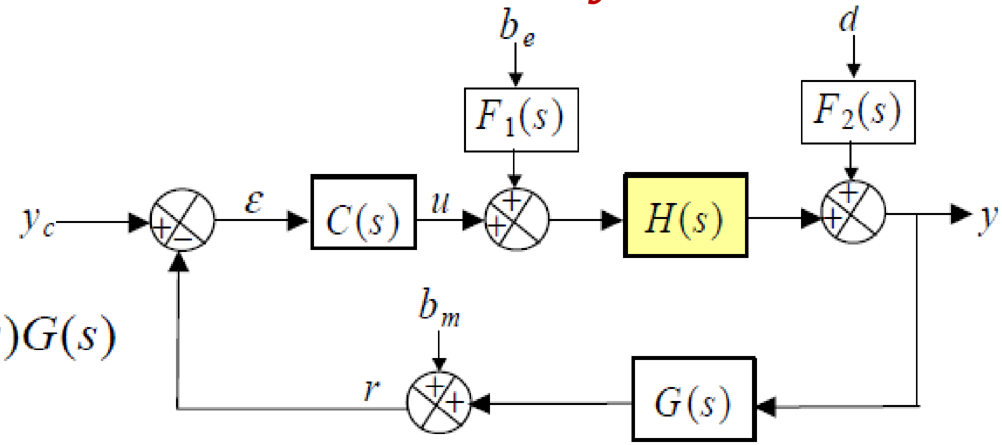

## *2. Théorème de stabilité*

Un système linéaire continu à temps invariant est asymptotiquement stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives

# *Analyse de la stabilité d'un système asservi*

## *3. Application du théorème de stabilité aux systèmes en BF*

$$H_{BF}(s) = \frac{C(s)H(s)}{1+H_{BO}(s)}$$




avec $H_{BO}(s) = C(s)H(s)G(s)$

➢**Le système asservi est asymptotiquement stable si et seulement si les pôles de $H_{BF}(s)$ sont à parties réelles strictement négatives.**

Equation caractéristique du système asservi : $1+H_{BO}(s)=0$

➢ **Le système asservi est stable ssi les racines de l'équation caractéristique sont à parties réelles strictement négatives.**

**Peut-on analyser la stabilité en BF à partir de $H_{BO}(s)$ *sans* calculer explicitement la fonction de transfert en BF? *Oui!***

# *Analyse de la stabilité d'un système asservi*

**Peut-on analyser la stabilité en BF à partir de $H_{BO}(s)$ *sans* calculer explicitement la fonction de transfert en BF? *Oui!***

## *4. Outils d'analyse de la stabilité en BF à partir de $H_{BO}(s)$*

- **Critère algébrique de Routh-Hurwitz**
- **Critère graphique de Nyquist**

# *Analyse de la stabilité d'un système asservi*

## *5. Analyse de la stabilité en BF : critère de Routh-Hurwitz*

- **Intérêt du critère**

**Soit *D(s)* le dénominateur de la fonction de transfert d'un système**

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{avec} \quad D(s)=a_n s^n+\cdots+a_1 s+a_0$$

**Le *critère de Routh* permet de déterminer si les racines de l'équation caractéristique *D(s)=0* du système sont à *parties réelles négatives* ou non sans calculer explicitement ces racines.**

# *Analyse de la stabilité d'un système asservi*

## *5. Analyse de la stabilité en BF : critère de Routh-Hurwitz*

- **Principe du critère de Routh-Hurwitz**

**Condition nécessaire (CN) de stabilité**

**Une condition nécessaire de stabilité est que tous les coefficients $a_i$ *de D(s)* soient strictement de même signe.**

- **Remarque**

➢ **La méthode de Routh-Hurwitz permet de porter une conclusion sur la stabilité d'un système ; cependant, elle ne permet pas de calculer la localisation exacte des racines au dénominateur.**

➢ **Il y a deux étapes pour la méthode de Routh-Hurwitz :**
**1. Générer la table de Routh**
**2. Interpréter la table**

# *Analyse de la stabilité d'un système asservi*

## *5. Analyse de la stabilité en BF : critère de Routh-Hurwitz*

- **Principe du critère de Routh-Hurwitz**

**Générer la table de Routh**

**Soit une fonction de transfert quelconque** :

$$F(s) = \frac{N(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

**On procède de la façon suivante :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | $a_4$ | $a_2$ | $a_0$ |
| $s^3$ | $a_3$ | $a_1$ | $0$ |
| $s^2$ | $A = \dfrac{a_3 a_2 - a_4 a_1}{a_3}$ | $B = \dfrac{a_3 a_0 - a_4 0}{a_3}$ | $\dfrac{a_3 0 - a_4 0}{a_3} = 0$ |
| $s^1$ | $C = \dfrac{A a_1 - B a_3}{A}$ | $\dfrac{A0 - a_3 0}{A} = 0$ | $0$ |
| $s^0$ | $D = \dfrac{CB - A0}{C}$ | $0$ | $0$ |

**Le tableau a au plus (n+1) lignes ; n : ordre de D(s))**

# *Analyse de la stabilité d'un système asservi*

## *5. Analyse de la stabilité en BF : critère de Routh-Hurwitz*

- **Principe du critère de Routh-Hurwitz**

**Enoncé du critère de Routh : CNS**

**Un système est asymptotiquement stable ssi tous les coefficients de la première colonne du tableau de Routh sont tous de même signe.**

**Remarques**

➢ **Le nombre de changements de signe dans la première colonne est égal au nombre de pôles à parties réelles positives ;**

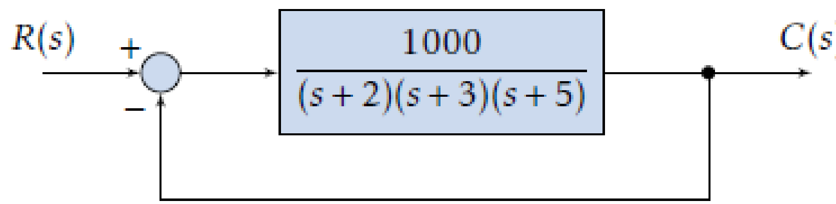
➢ **Si dans la première colonne il existe un élément nul, le système admet au moins un pôle à partie réelle positive ou une paire de pôles conjugués imaginaires purs.**

# Analyse de la stabilité d'un système asservi

## 5. Analyse de la stabilité en BF : critère de Routh-Hurwitz

▪**Exemple d'application**

Soit le système suivant :




▪Créer la table de Routh.

➢ Premièrement, il faut réduire le système.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1000}{s^3+10s^2+31s+1030}$$

➢ On crée la table de Routh

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^3$ | $1$ | $31$ | $0$ |
| $s^2$ | $\cancel{10}\ 1$ | $\cancel{1030}\ 103$ | $0$ |
| $s^1$ | $\frac{-103+31}{1} = -72$ | $0$ | $0$ |
| $s^0$ | $\frac{(-72)(103)-0}{-72} = 103$ | $0$ | $0$ |

← On peut diviser par 10 pour simplifier

**<u>Note</u> : On a deux changements de signe dans la première colonne, donc deux racines réelles positives → instable.**

# Analyse de la stabilité d'un système asservi

## 6. Analyse de la stabilité en BF : Cas particuliers

### 6.1 Zéro dans la première colonne

**Dans ce cas, on remplace le zéro par une variable ε, et on prend la limite lorsque ε tend vers $0^+$ (ou $0^-$).**

**Exemple**

**Soit le système suivant :** $$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

**Calculer la table de Routh**

➢ **La table de Routh est :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | $1$ | $3$ | $5$ |
| $s^4$ | $2$ | $6$ | $3$ |
| $s^3$ | $\cancel{0}\ \epsilon$ | $3.5$ | $0$ |
| $s^2$ | $\frac{6\epsilon-7}{\epsilon}$ | $3$ | $0$ |
| $s^1$ | $\frac{42\epsilon-49-6\epsilon^2}{12\epsilon-14}$ | $0$ | $0$ |
| $s^0$ | $3$ | $0$ | $0$ |

➢ **On prend la limite :**

$$s^2 : \epsilon \to 0^+ : \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{6\epsilon - 7}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} 6 - \frac{7}{\epsilon} = -\infty < 0$$

$$s^1 : \epsilon \to 0^+ : \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14} = \frac{49}{14} > 0$$

**Il y a deux changements de signe (de $s^3$ à $s^2$ et de $s^2$ à $s^1$). Le système est donc *instable.***

# *Analyse de la stabilité d'un système asservi*

## *6. Analyse de la stabilité en BF : Cas particuliers*

### *6.2 Une rangée entière de zéros*

**Dans ce cas, on va à la rangée précédente et on crée un polynôme *A(s)* formé des coefficients de cette rangée. On dérive alors *A(s) pour* obtenir les coefficients de la nouvelle rangée.**

**Exemple:** **Déterminer la stabilité de la fonction de transfert suivante** :

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

- **La table de Routh est :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 6 | 8 |
| $s^4$ | $\cancel{7}$ 1 | $\cancel{42}$ 6 | $\cancel{56}$ 8 |
| $s^3$ | 0 | 0 | 0 |

- **La troisième rangée est composée de zéros. On construit alors le polynôme :**

$$A(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

**et on dérive** : $$\frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0$$

- **La table de Routh est alors modifiée :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 6 | 8 |
| $s^4$ | $\cancel{7}$ 1 | $\cancel{42}$ 6 | $\cancel{56}$ 8 |
| $s^3$ | $\cancel{4}$ 1 | $\cancel{12}$ 3 | 0 |
| $s^2$ | 3 | 8 | 0 |
| $s^1$ | 0.333 | 0 | 0 |
| $s^0$ | 8 | 0 | 0 |

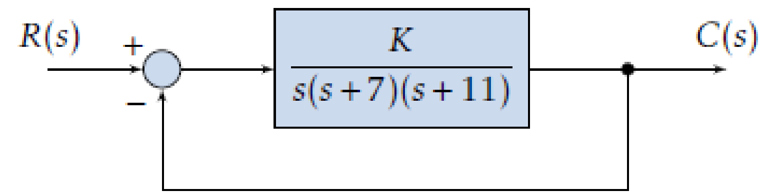
**Il n'y a aucun changement de signe : le système est *stable.***

# *Analyse de la stabilité d'un système asservi*

## *6. Analyse de la stabilité en BF : Cas particuliers*

### *6.3 Design à l'aide du critère de Routh-Hurwitz*

**Exemple:** **Soit le système suivant :**




**Trouver les valeurs de K (K > 0) pour rendre le système stable, instable, et marginalement stable (limite de stabilité).**

➢ **La fonction de transfert en BF:**

$$T(s)=\frac{K}{s^3+18s^2+77s+K}$$

➢ **La table de Routh est :**

$$\begin{array}{lcc}
s^3 & 1 & 77 \\
s^2 & 18 & K \\
s^1 & \dfrac{1386-K}{18} & 0 \\
s^0 & K & 0
\end{array}$$

➢**Pour que le système soit stable, il ne doit pas y avoir de changement de signe dans la première colonne.**

$$\frac{1386-K}{18}>0 \Rightarrow K<1386$$

➢**Pour que le système soit instable,**

$$\frac{1386-K}{18}<0 \Rightarrow K>1386$$

➢**Pour que le système est marginalement stable *K = 1386***

**Si *K = 1386*, on a une rangée de zéros. Pour compléter la table,**

$$\frac{d(18s^2+K)}{ds}=36s$$

$$\begin{array}{lcc}
s^1 & 36 & 0 \\
s^0 & K=1386 & 0
\end{array}$$

# *Contenu du cours III*

1. *Introduction*
2. *Analyse de la stabilité d'un système asservi*
3. *Précision des systèmes asservis*
4. *Performances dynamiques.*

# *Précision des systèmes asservis*

## *1. Définitions*

L'erreur statique est la différence entre l'entrée et la sortie d'un système lorsque $t \to \infty$ pour une entrée de contrôle.

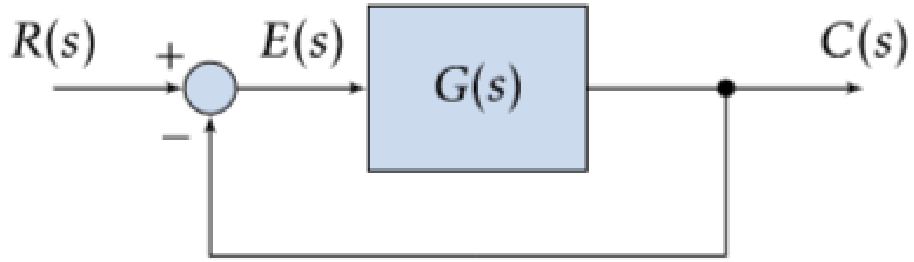
On utilise une entrée connue, comme un échelon, une rampe, ou une parabole pour caractériser la réponse du système et son erreur statique.

Le calcul de l'erreur statique n'est valide que si le système est stable.
Il faut donc s'assurer de stabiliser le système étudié avant toute considération de l'erreur statique.

# Précision des systèmes asservis

## 2. Système à retour unitaire

Soit un système de contrôle de la forme suivante




Par définition, l'erreur statique $e_{ss}$ est

$$e_{ss} = r(t) - c(t) = R(s) - C(s)$$

Note : L'erreur statique est définie pour un système à boucle de retour unitaire.

# Précision des systèmes asservis

## 2. Système à retour unitaire

Selon le système

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s)\left(1 - \frac{C(s)}{R(s)}\right)$$

L'erreur statique est alors

$$\begin{aligned} e_{ss} &= r(\infty) - c(\infty) = e(\infty) \\ &= \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s\,(R(s) - C(s)) \end{aligned}$$

L'erreur statique dépend de $R(s)$

l'erreur statique est différente selon l'entrée utilisée.

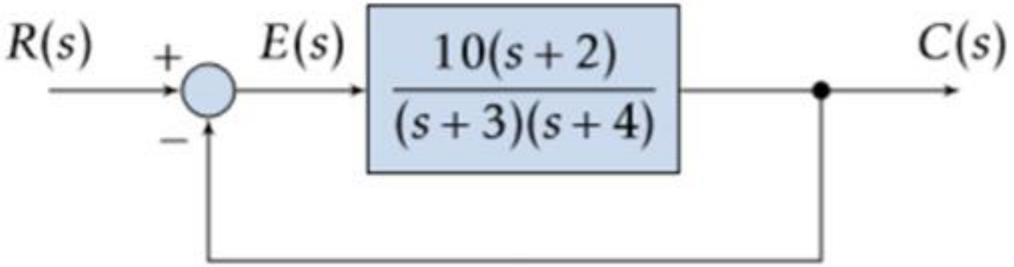
# Précision des systèmes asservis

## 3.Evaluation de l'erreur statique

### Entrée échelon

### EXEMPLE

Calculer l'erreur statique due à une entrée échelon unitaire pour le système suivant :




Premièrement, on vérifie la stabilité du système.

$$T(s) = \frac{10(s+2)}{(s+3)(s+4)+10(s+2)} = \frac{10(s+2)}{s^2+17s+32}$$

# Précision des systèmes asservis

## 3.Evaluation de l'erreur statique

### Entrée échelon

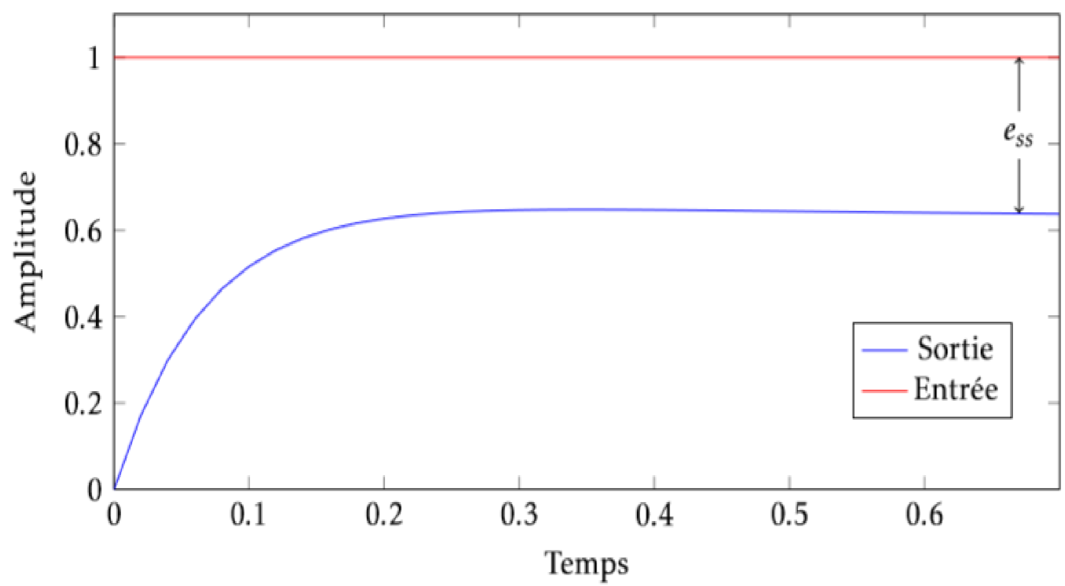
On crée alors la table de Routh :

| | | |
|---|---|---|
| $s^2$ | 1 | 32 |
| $s^1$ | 17 | 0 |
| $s^0$ | 32 | 0 |

Le système est stable.

L'erreur statique est $e_{ss} = 0.375$

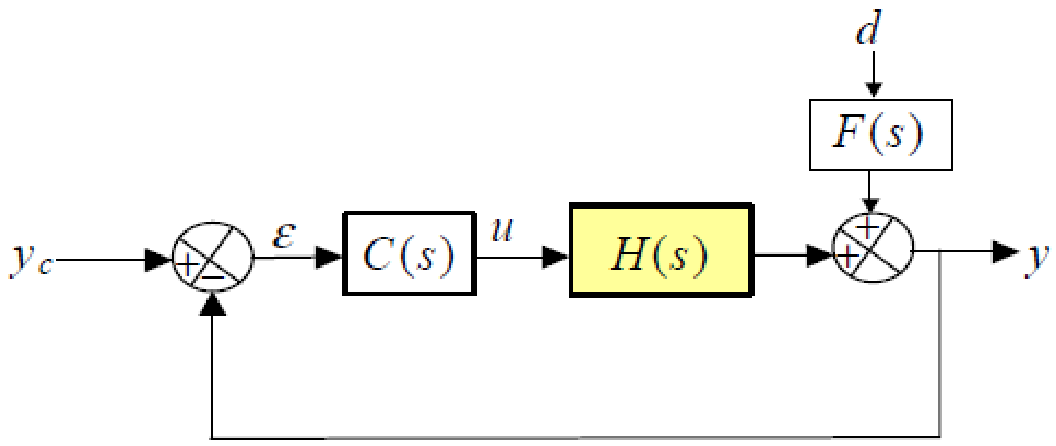
Ceci donnerait la figure suivante :



# *Précision des systèmes asservis perturbés*

## *1. Définition*

**Considérons le schéma simplifié d'asservissement:**




**La précision est définie à partir du signal d'erreur ε :**

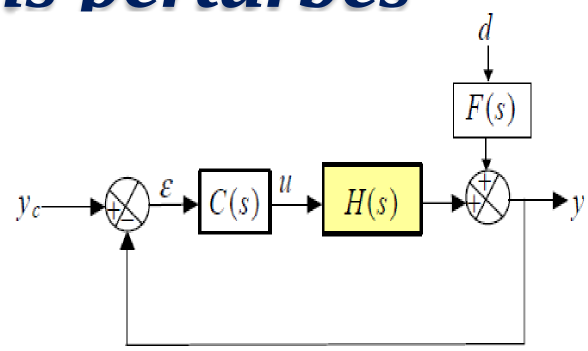
$$\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$$

**On s'intéresse à l'erreur en régime permanent**

$$\varepsilon_\infty = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t)$$

# Précision des systèmes asservis perturbés

## 2. Sortie du système asservi




$$Y(s)=\frac{H_{BO}(s)}{1+H_{BO}(s)}Y_c(s)+\frac{F(s)}{1+H_{BO}(s)}D(s)$$

avec $H_{BO}(s)=C(s)H(s)$

## 3. Transformé de Laplace de l'erreur

$$E(s)=Y_c(s)-Y(s)$$

$$E(s)=Y_c(s)-\frac{H_{BO}(s)}{1+H_{BO}(s)}Y_c(s)-\frac{F(s)}{1+H_{BO}(s)}D(s)$$

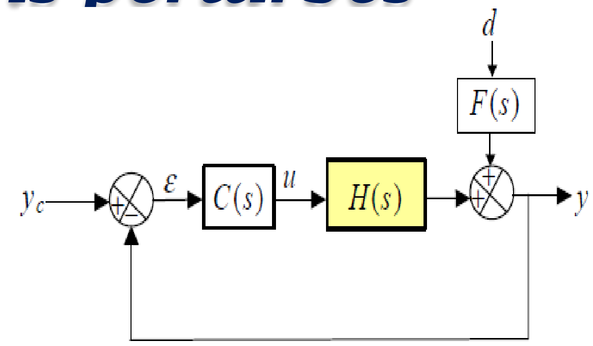
$$\boxed{E(s)=\frac{1}{1+H_{BO}(s)}Y_c(s)-\frac{F(s)}{1+H_{BO}(s)}D(s)}$$

$$\boxed{H_{BO}(s)=C(s)H(s)}$$

# *Précision des systèmes asservis perturbés*

## *4. Erreur d'asservissement*

$$E(s)=\frac{1}{1+H_{BO}(s)}Y_c(s)-\frac{F(s)}{1+H_{BO}(s)}D(s)$$




**L'erreur est en fonction de deux termes :**

- **Un terme relatif à l'écart avec <u>la consigne</u>:**

$$E_c(s)=\frac{1}{1+H_{BO}(s)}Y_c(s)$$

- **Un terme d'erreur dû à <u>la perturbation</u>**

$$E_d(s)=-\frac{F(s)}{1+H_{BO}(s)}D(s)$$

**Le système est d'autant plus précis que l'erreur en régime permanent est proche de 0**

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)\to 0$$

$$\varepsilon_c+\varepsilon_d=\varepsilon_t$$

# *Contenu du cours V*

1. *Introduction*
2. *Précision des systèmes asservis*
3. *Précision des systèmes asservis perturbés*
4. ***Performances dynamiques.***

# *Performances dynamiques.*

## *1. Performances*

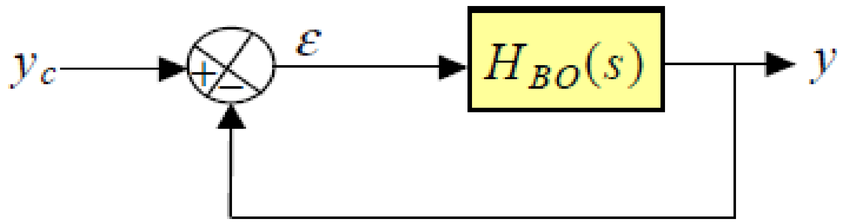
**On apprécie le comportement dynamique des systèmes asservis en termes de:**

- **Rapidité : temps de montée $t_m$, temps de réponse $t_r$**
- **Dépassement**

**Ces performances peuvent être évaluées sur la réponse Indicielle du système asservi.**

# Performances dynamiques.

## 2. Système du premier ordre en BF




$$H_{BO}(s) = \frac{K_0}{1+T_0 s}$$

### Fonction de transfert en BF

$$H_{BF}(s) = \frac{K_0}{1+K_0+T_0 s} \quad \Rightarrow \quad H_{BF}(s) = \frac{K_{BF}}{1+T_{BF} s}$$

avec $K_{BF} = \frac{K_0}{1+K_0}$ et $T_{BF} = \frac{T_0}{1+K_0}$

$K_{BF}$ : gain statique en BF

$T_{BF}$ : constante de temps en BF

**Quand on boucle un système du 1er ordre, on obtient en BF un système ayant le comportement d'un 1er ordre**

# *Performances dynamiques.*

## *2. Système du 1er ordre en BF*

### 2.1 Fonction de transfert en BF

**Remarques**

➢**Le système du 1er ordre en BF présente en régime permanent, une erreur statique non nulle . Cette erreur est d'autant plus petite que le gain $K_0$ est grand.**

➢**Temps de réponse en BF:**

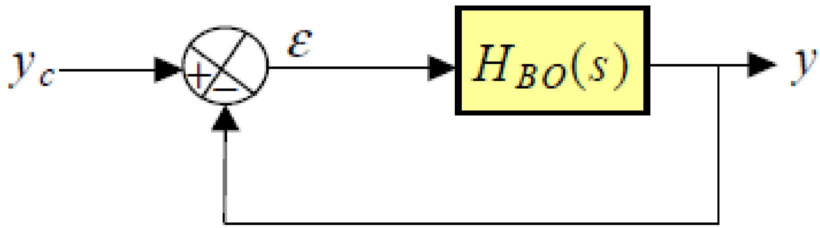
$$t_{r,BF} = 3T_{BF} = \frac{3T_0}{1+K_0}$$

- **Le système est plus rapide en BF qu'en BO**

- **Le temps de réponse est d'autant plus petit que $K_0$ est grand**

# *Performances dynamiques.*

## *3. Système du 2ème ordre en BF*




$$H_{BO}(s) = \frac{K_0}{\frac{s^2}{\omega_{n,0}^2} + 2\frac{\xi_0}{\omega_{n,0}}s + 1}$$

### Fonction de transfert en BF

$$H_{BF}(s) = \frac{K_0}{\frac{s^2}{\omega_{n,0}^2} + 2\frac{\xi_0}{\omega_{n,0}}s + (1+K_0)} \Rightarrow H_{BF}(s) = \frac{K_{BF}}{\frac{s^2}{\omega_{n,BF}^2} + 2\frac{\xi_{BF}}{\omega_{n,BF}}s + 1}$$

$K_{BF} = \dfrac{K_0}{1+K_0}$ : gain statique en BF

$\xi_{BF} = \dfrac{\xi_0}{\sqrt{1+K_0}}$ : facteur d'amortissement en BF $(0 < \xi_{BF} < 1)$

$\omega_{n,BF} = \omega_{n,0}\sqrt{1+K_0}$ : pulsation naturelle en BF

# *Performances dynamiques.*

## *3. Système du deuxième ordre en BF*

### Exemple d'application

- **Déterminer les caractéristique ($\zeta_{BF}$, $\omega_{nBF}$, $k_{BF}$, $tr_{BF}$, $tm_{BF}$) d'un système en BF sachant qu'en BO $\zeta=0.6$ , $\omega_n=1.96$ rad/s et le gain statique vaut 1.**

- **Que peut on dire sur la rapidité du système en BF par-rapport la BO?**