Université d'Oran 2
Institut de Maintenance et de Sécurité Industrielle
Département de Maintenance en Instrumentation
Master 1: Génie Industriel

Mathématique pour l'Automatique

Cours II

Réponses temporelles des systèmes continus LTI

Chargée de module:

Mme BENMANSOUR . S

2018/2019

Contenu du cours II

1. ***Introduction***

2. ***Etude des systèmes du 1er ordre***

2. ***Etude des systèmes du 2ème ordre***

Contenu du cours II

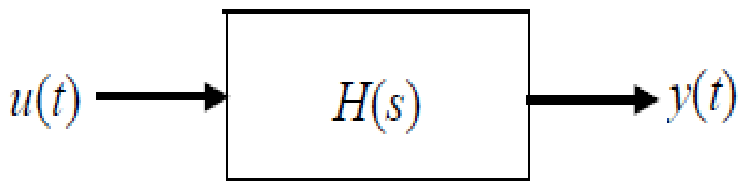
1. ***Introduction***

2. ***Etude des systèmes du 1er ordre***

2. ***Etude des systèmes du 2ème ordre***

Introduction

1. Système continu LTI



$H(s)$: fonction de transfert

Quelle est la forme de la sortie y(t) du modèle en réponse aux signaux usuels?

- **impulsion de Dirac** $u(t)=\delta(t)$
- **signal échelon** $u(t)=\Gamma(t)$
- **signal rampe** $u(t)=v(t)$

Introduction

2. Décomposition en éléments simples

$$H(s) = \sum_{i} H_i(s)$$

$H_i(s)$: fonction de transfert de systèmes de base ou systèmes fondamentaux (1er ordre, 2ème ordre)

Contenu du cours II

1. *Introduction*

2. ***Etude des systèmes du 1er ordre***

2. *Etude des systèmes du 2ème ordre*

Etude des systèmes du 1er ordre

1. Définition

Un système du premier ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre :

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$$

2. Fonction de transfert

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \;\Rightarrow\; sTY(s) + Y(s) = KU(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{K}{1+Ts}}$$

T : constante de temps

K : gain statique

Pôle : $\lambda = -\dfrac{1}{T}$

Condition de stabilité : $T > 0$

Etude des systèmes du 1^er^ ordre

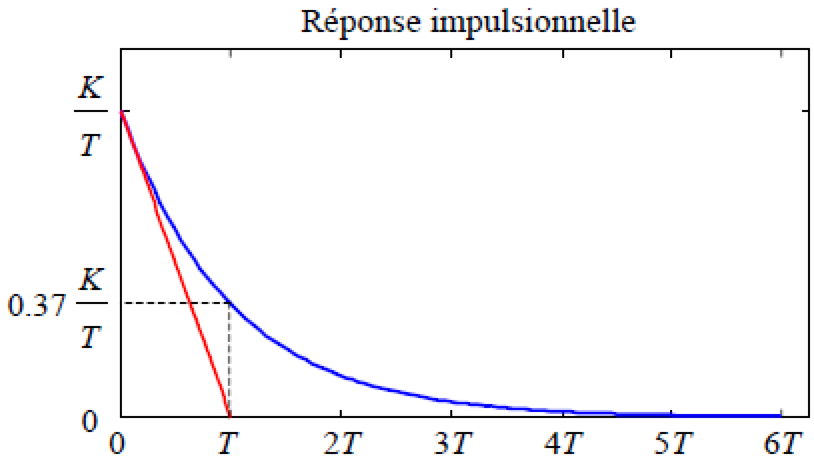
3 . Réponse temporelle

3.1 Réponse impulsionnelle

Entrée : signal impulsion $u(t)=\delta(t) \Rightarrow U(s)=1$

Réponse du système :

$$Y(s)=H(s)=\frac{K}{1+Ts} \Rightarrow y(t)=h(t)=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}=\frac{K}{T}e^{\lambda t}$$



0	T	$2T$	$3T$
$h_0=\frac{K}{T}$	$0.37\ h_0$	$0.13\ h_0$	$0.05\ h_0$

•Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.2 Réponse indicielle

- **Entrée : signal échelon** $u(t) = E_0\Gamma(t)$

- **Réponse du système:**

$$u(t) = E_0\Gamma(t) \Rightarrow U(s) = \frac{E_0}{s}$$ **On en déduit** $$Y(s) = \frac{K\ E_0}{s(1+Ts)}$$

$$y(t) = K.E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = K.E_0\left(1 - e^{\lambda t}\right)$$

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.2 Réponse indicielle

- **Valeur de la sortie en régime permanent (valeur finale)**

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} s.Y(s)=\lim_{s\to 0}\left(s.\frac{E_0}{s}.\frac{K}{1+Ts}\right) \Rightarrow y(\infty)=K\ E_0$$

- **Valeur initiale de la sortie**

$$y(0)=\lim_{t\to 0} y(t)=\lim_{s\to\infty} s.Y(s)=\lim_{s\to\infty}\left(s.\frac{E_0}{s}.\frac{K}{1+Ts}\right) \Rightarrow y(0)=0$$

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.2 Réponse indicielle

- **Tangente à l'origine**

Pour déterminer la tangente à l'origine, il faut déterminer la dérivée de y(t) pour t = 0. On peut utiliser le théorème de la valeur initiale applique à la dérivée pour obtenir cette valeur :

$$\lim_{t\to 0} y'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{dy(t)}{dt} = \lim_{s\to\infty} s\ \left(s.Y(s)\right) = \lim_{s\to\infty} s^2\ \frac{K\ E_0}{s\left(1+Ts\right)} = \frac{K\ E_0}{T}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} y'(t) = \frac{y(\infty)}{T}$$

Etude des systèmes du 1^er ordre

2. Réponse temporelle

3.2 Réponse indicielle

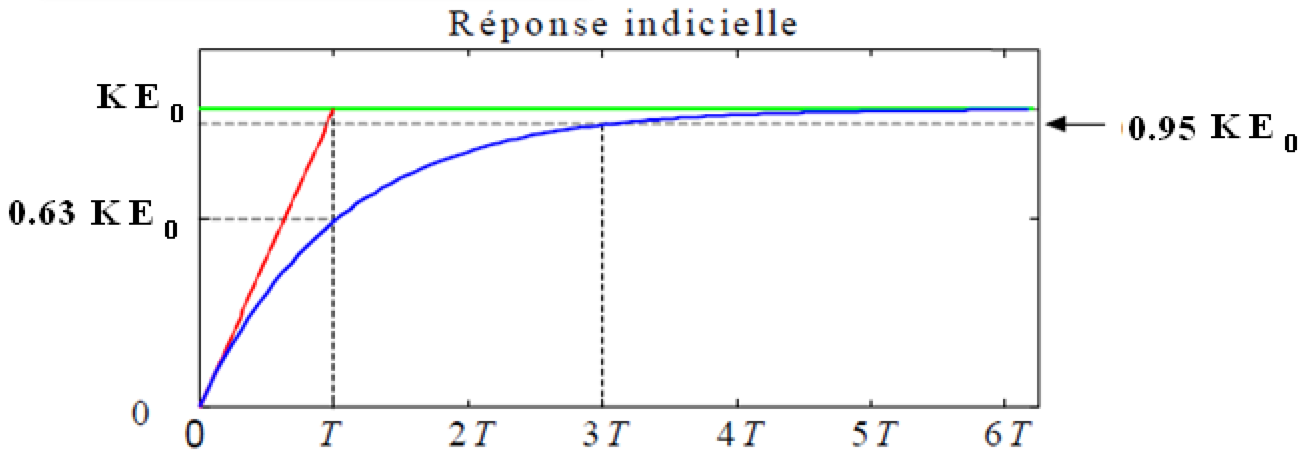


Tableau récapitulatif de l'évolution de la sortie

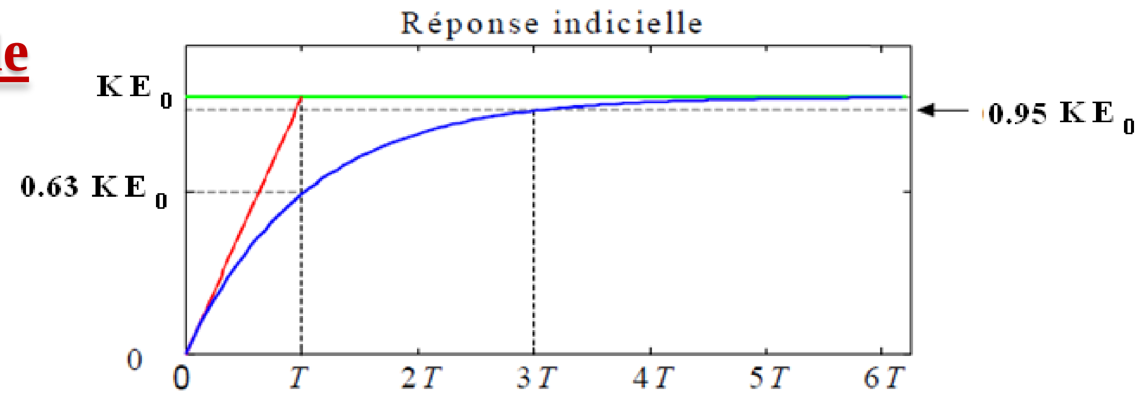
t	T	$2T$	$3T$	$5T$	∞
$\frac{y(t)}{y_\infty}(\%)$	63%	87%	95%	99,4%	100%

y_∞ : valeur de la sortie en régime permanent

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.2 Réponse indicielle



- **Temps de réponse** t_r **du système:**

•t_r = temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $0.95y_\infty$

$$\boxed{t_r \approx 3T}$$

- **Temps de montée** t_m

t_m = temps au bout duquel la réponse passe de $0.1y_\propto$ à $0.9y_\infty$

$$\boxed{t_m \approx 2{,}2T}$$

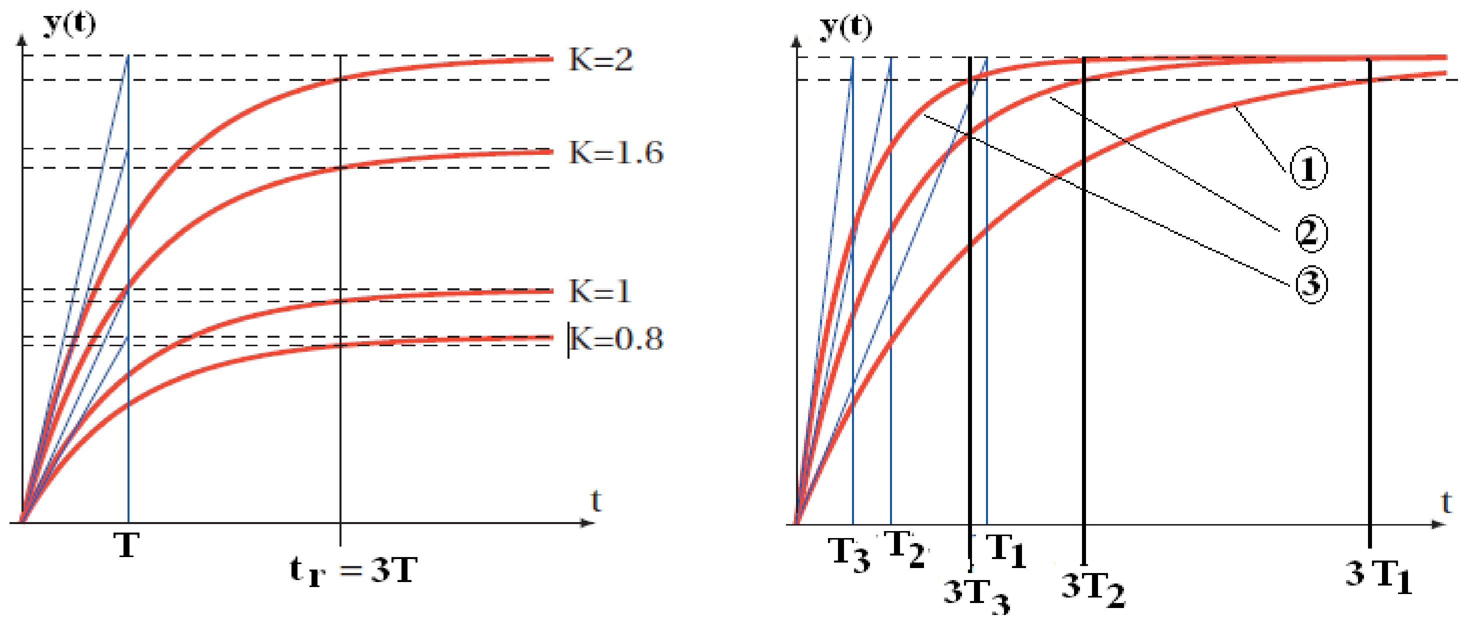
Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.2 Réponse indicielle

Remarque

On note que le *temps de réponse* ne dépend pas de la consigne d'entrée ni du gain mais uniquement de la *constante de temps T*, plus la constante de temps est importante, plus le temps de réponse est important.



(a) Réponse à un échelon unitaire d'un 1er ordre pour différentes valeurs du gain K

(b) Réponse à un échelon d'un 1er ordre pour différentes valeurs de la constante de temps τ

FIGURE 4.1 – Réponse d'un système du 1er ordre

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.4 Réponse à une rampe

- **Entrée : signal rampe** $u(t)=v(t)$

- **Réponse du système**

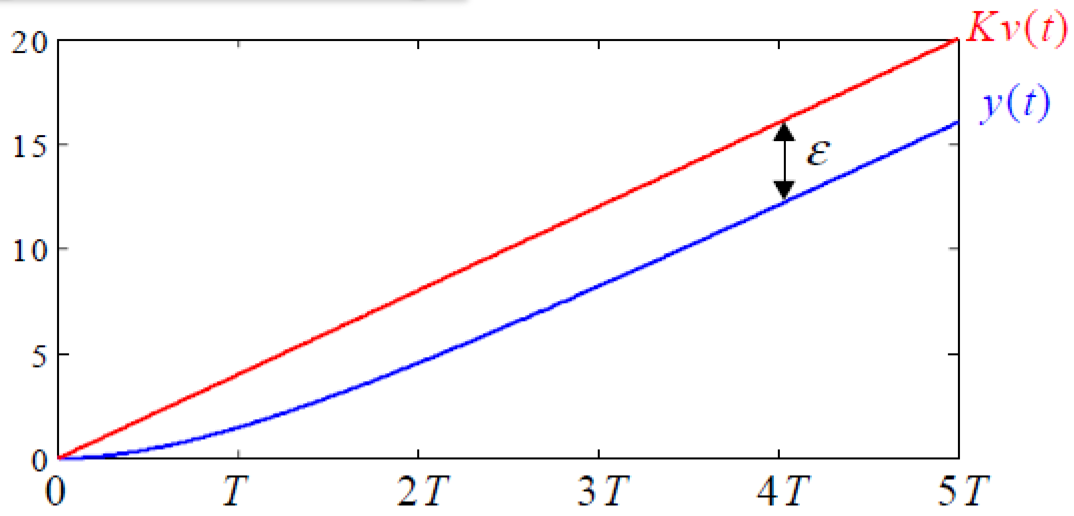
$u(t)=v(t) \Rightarrow U(s)=\dfrac{1}{s^2}$ **On en déduit** $Y(s)=\dfrac{K}{s^2(1+Ts)}$

$$\boxed{y(t)=K(t-T)+KTe^{-\frac{t}{T}}}$$

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.4 Réponse à une rampe



- La sortie suit asymptotiquement la rampe $Kv(t)$ avec un retard T
- L'écart en régime permanent $\varepsilon = Kv(t) - y(t)$ est appelé erreur de traînage

Erreur de traînage : $\varepsilon = KT$

Contenu du cours II

1. *Introduction*
2. *Etude des systèmes du 1er ordre*
2. **Etude des systèmes du 2ème ordre**
3. *Systèmes d'ordre supérieur à 2 et autre système*

Etude des systèmes du 2ème ordre

1. Définition

Un système du second ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre:

$$a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0u(t)$$

2. Fonction de transfert

$$a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0u(t) \;\Rightarrow\; \left(a_2s^2+a_1s+a_0\right)Y(s)=b_0U(s)$$

$$\boxed{H(s)=\frac{b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}}$$

Etude des systèmes du 2ème ordre

2. Fonction de transfert

Autre écriture de la fonction de transfert

$$\boxed{H(s)=\frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1}}$$

Forme canonique

ou

$$\boxed{H(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}$$

K : gain statique

ξ : facteur d'amortissement sans dimension

ω_n : pulsation propore ou pulsation naturelle non amortie du système (en rad/s) avec $\omega_n > 0$

Equation caractéristique : $s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 = 0$

Etude des systèmes du 2ème ordre

3. Pôles du système

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- **Les pôles sont les racines de l'équation caractéristique**
- **Etude du discriminant réduit** $\Delta = \omega_n^2(\xi^2 - 1)$

  - Si $|\xi| \geq 1$ alors $\Delta \geq 0$: le système a des pôles réels et son comportement est apériodique
    - Si $|\xi| > 1$ alors le système à deux pôles réels distincts
    - Si $|\xi| = 1$ alors le système à un pôle réel double
  - Si $|\xi| < 1$ alors $\Delta < 0$: le système a une paire de pôles complexes conjugués et son comportement est oscillatoire

Etude des systèmes du 2ème ordre

4. Système apériodique : $|\xi| \geq 1$

4.1 Réponse indicielle(cas $\xi > 1$) :

- **Pôles du système**

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- **Condition de stabilité**

Le système est stable si les pôles λ_1 et λ_2 sont négatifs, ce qui correspond à la condition $\xi \geq 1$

- **Factorisation de la fonction de transfert**

Comme $\lambda_1 \lambda_2 = \omega_n^2$, on a $H(s) = \dfrac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$

Le système du 2ème ordre apériodique est équivalent à la mise en série de deux systèmes du 1er ordre de constantes de temps :

$$T_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad T_2 = -\frac{1}{\lambda_2}$$

Etude des systèmes du 2ème ordre

4. Système apériodique : $|\xi| \geq 1$

4.1 Réponse indicielle(cas $\xi > 1$) :

- **Décomposition de la FT en éléments simples**

$$H(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{K_1}{(1+T_1 s)} - \frac{K_2}{(1+T_2 s)}$$

avec $K_1 = \dfrac{K\,T_1}{T_1 - T_2}$ et $K_2 = \dfrac{K\,T_2}{T_1 - T_2}$

- **Réponse indicielle**

C'est la somme des réponses indicielles des deux sous-systèmes

$$y(t) = K_1\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) - K_2\left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) = K_1(1 - e^{\lambda_1 t}) - K_2(1 - e^{\lambda_2 t})$$

Etude des systèmes du 2ème ordre

4. Système apériodique $: |\xi| \geq 1$

4.2 Réponse indicielle(cas $\xi = 1$) :

▪**La Fonction de transfert**

La fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme :

$$H(s) = \frac{K}{\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)^2} = \frac{K}{(1+Ts)^2}$$

▪**Pôle de la FT**

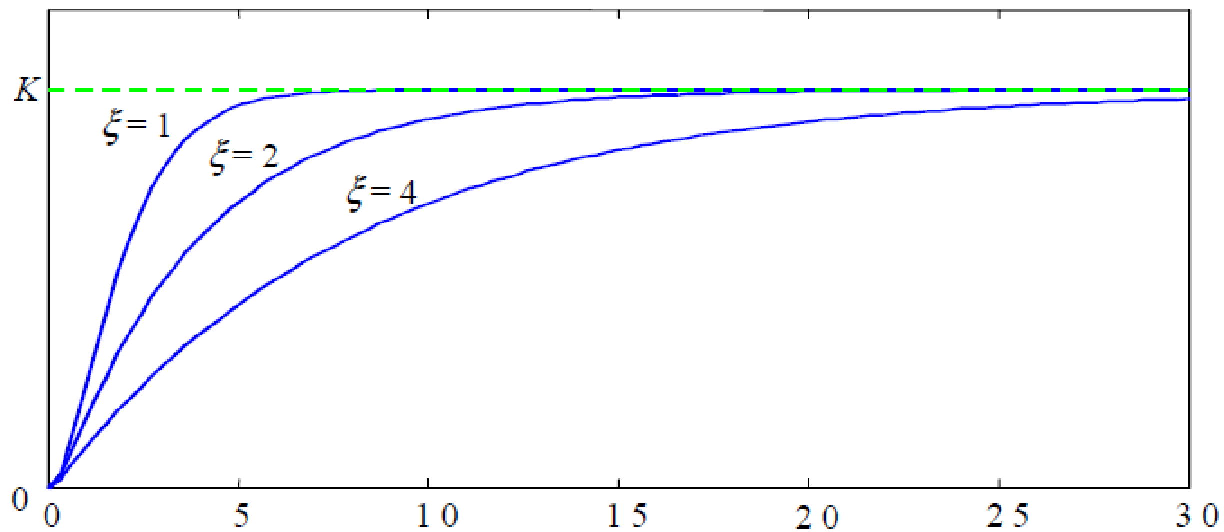
$$\Delta = \omega_n^2(\xi^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

Le dénominateur admet alors une racine réelle double,

Etude des systèmes du 2ème ordre

4. Système apériodique : $|\xi| \geq 1$

4.3 réponse indicielle :



- **Remarques**
  - **Pente à l'origine nulle**
  - **La réponse la plus rapide correspond à** $\xi = 1$

Etude des systèmes du 2ème ordre

5. Système oscillatoire : $|\xi| < 1$

▪ Pôles du système

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

▪ Condition de stabilité

Le système est stable si $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$ soit $\boxed{0 < \xi < 1}$

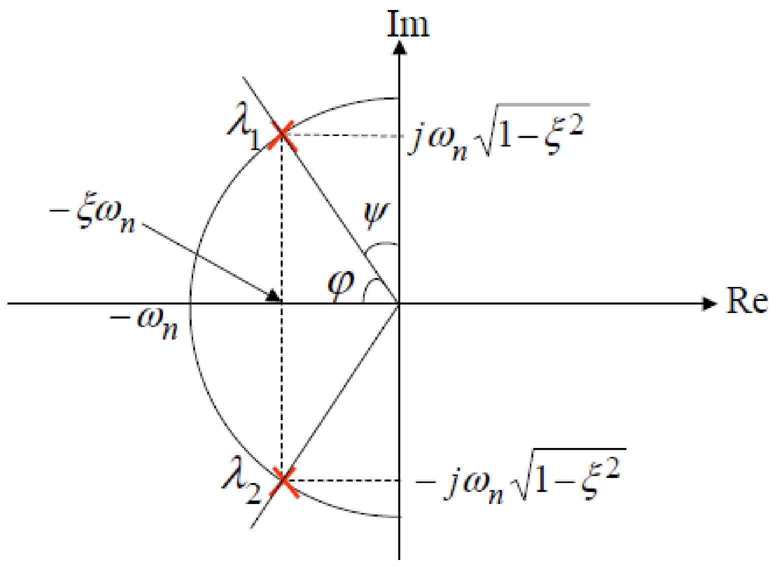
▪ Lieu des pôles

Pour $0 \le \xi \le 1$

Rayon de l'arc de cercle = ω_n

$$\cos(\varphi) = \xi$$

$$\sin(\psi) = \xi$$



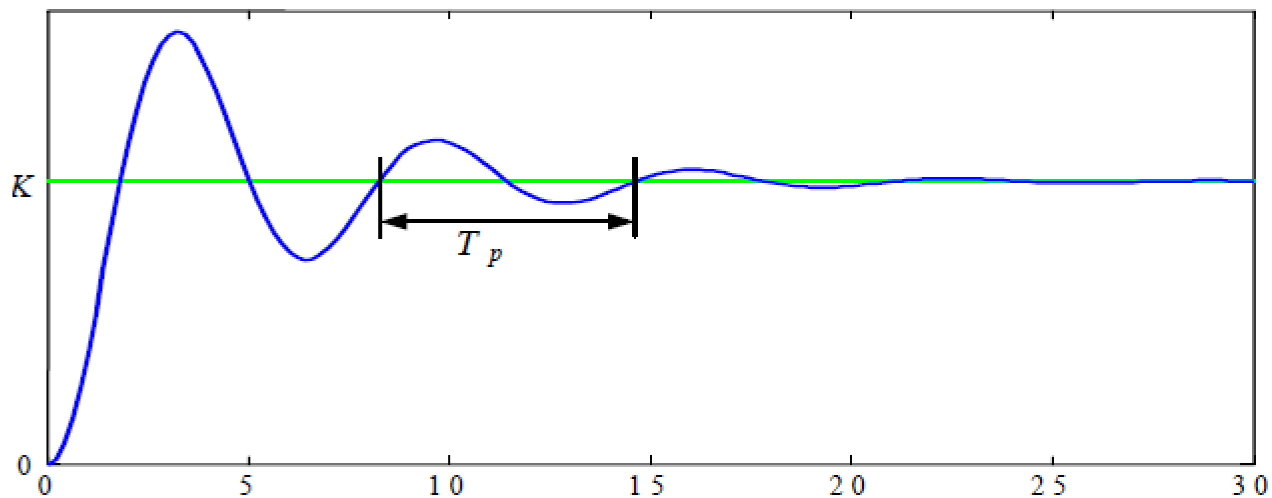
Etude des systèmes du 2ème ordre

5. Système oscillatoire $(0<\xi<1)$

- **Réponse indicielle**

$$y(t)=K\left(1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_p t+\varphi)\right)$$

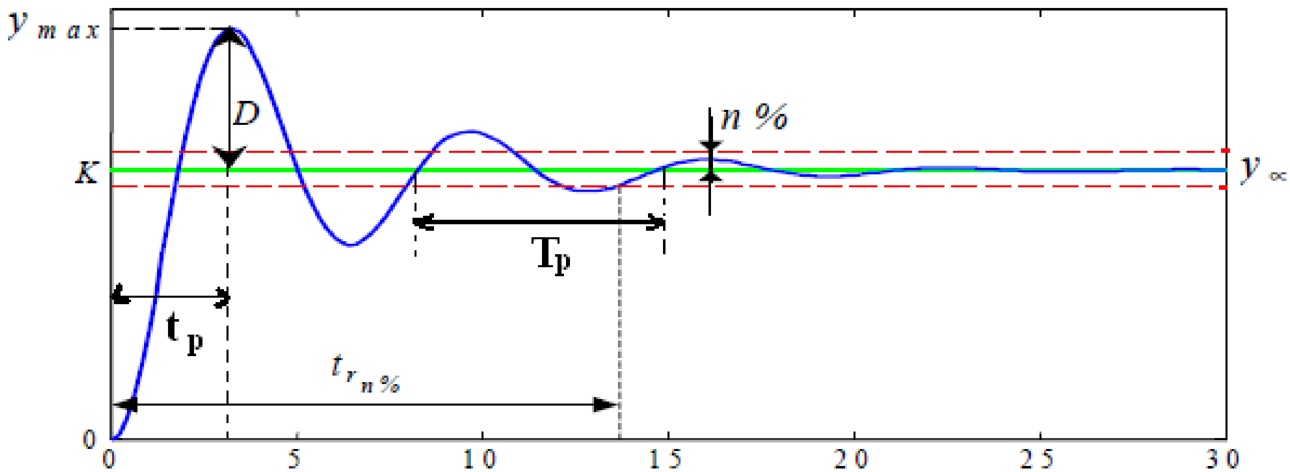
avec $\omega_p=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ et $\varphi=\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)=\arccos\xi$



Etude des systèmes du 2ème ordre

5. Système oscillatoire $(0 < \xi < 1)$

▪ Caracteristique de la réponse indicielle



Réponse oscillatoire amortie de <u>pulsation</u> $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

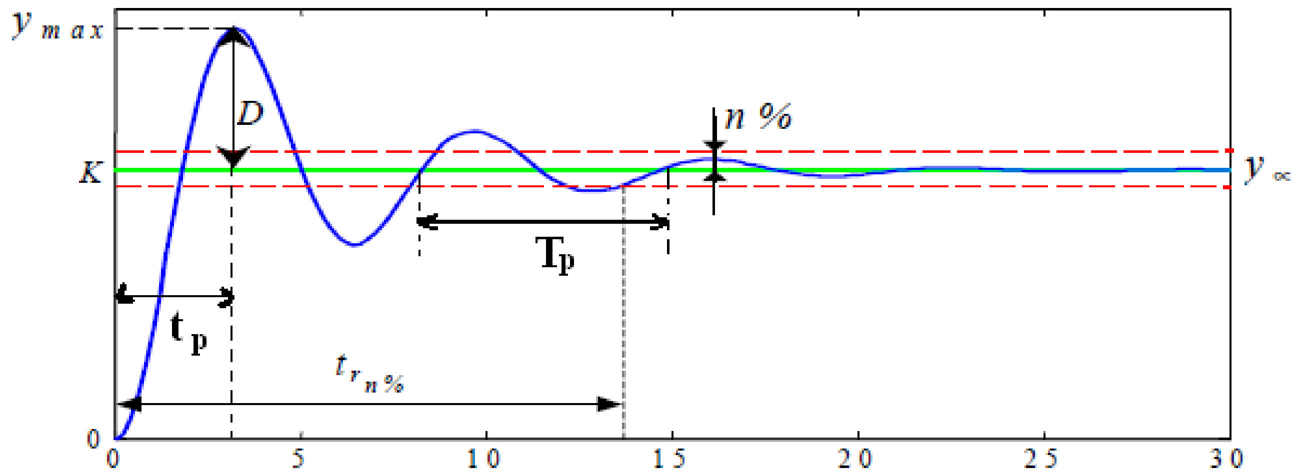
<u>Pseudo-période des oscillations</u> $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$

<u>Temps de pic</u> $T_{pic} = \dfrac{\pi}{\omega_p}$

Etude des systèmes du 2ème ordre

5. Système oscillatoire $(0<\xi<1)$

▪ Caracteristique de la réponse indicielle



Dépassement (D)

Définition:

$$D_{\%}=\frac{y_{\max}-y_\infty}{y_\infty}\times 100$$

y_∞ : valeur de la sortie en régime permanent

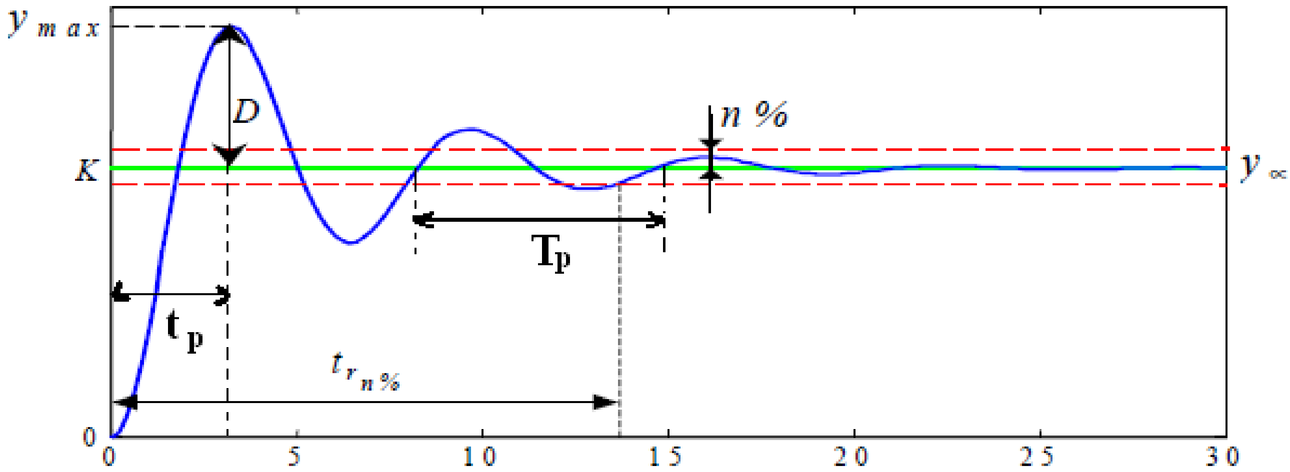
y_{max} : valeur de pic de la réponse indicielle

D est lié au coefficient d'amortissement ξ par : $D_{\%}=100\,e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Etude des systèmes du 2ème ordre

5. Système oscillatoire $(0 < \xi < 1)$

▪ Caractéristique de la réponse indicielle



Temps de réponse $n\%\ (t_{r_{n\%}})$

C'est le temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $\pm n\%$ de sa valeur finale

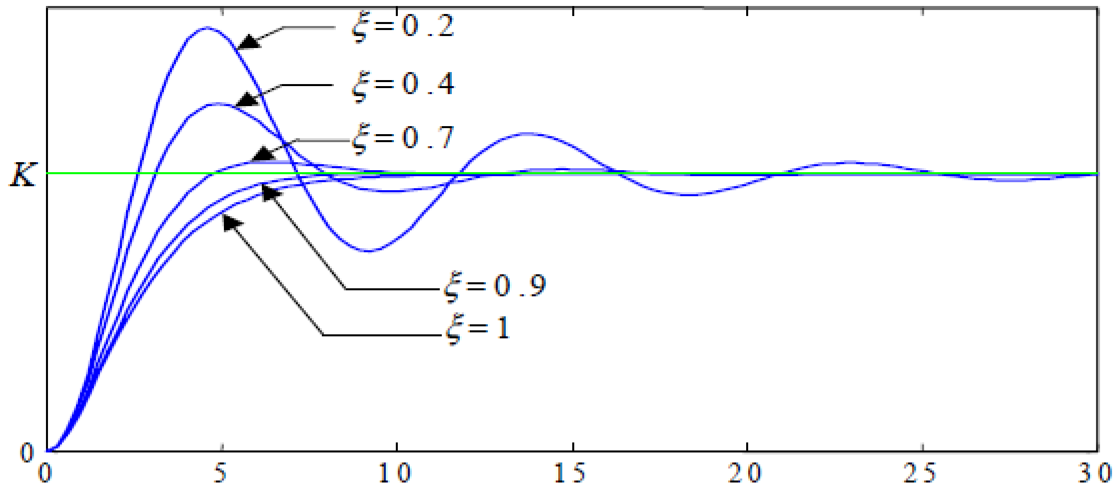
$$t_{r_{n\%}} \approx \frac{1}{\xi\omega_n}\ln\frac{100}{n} \quad (\xi < 0.7)$$

On mesure en général le temps de réponse à 5% : $t_{r_{5\%}} \approx \dfrac{3}{\xi\omega_n} \quad (\xi < 0.7)$

Etude des systèmes du 2ème ordre

5. Système oscillatoire $(0 < \xi < 1)$

▪ **Influence du coefficient d'amortissement**

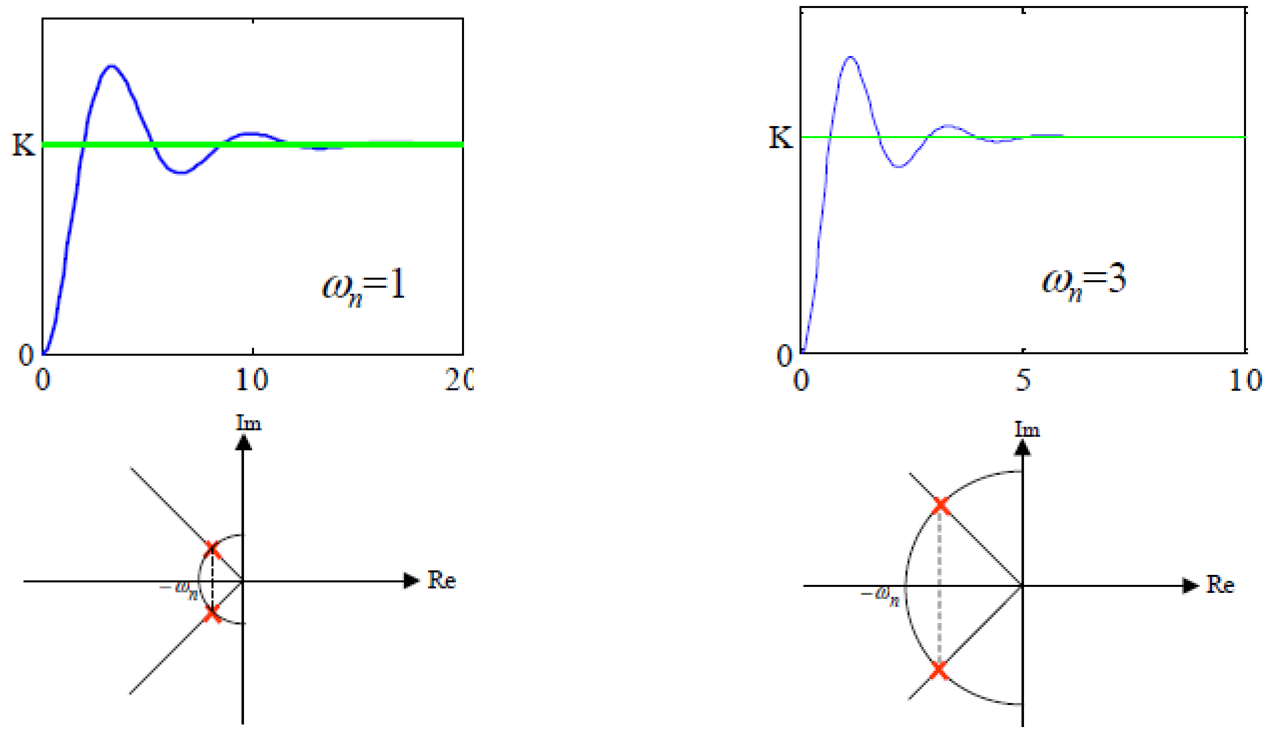


- Amortissement faible ($\xi < 0.7$) : réponse peu amortie, fortes oscillations, fort dépassement, réponse d'autant plus rapide que ξ est faible
- Amortissement fort ($\xi > 0.7$) : réponse très amortie, pas d'oscillations, dépassement à peine visible
- Amortissement $\xi = 0.7$ (souvent utilisé)
  - Dépassement $D \approx 5\%$ à $t_{r_{5\%}} \approx 3$

Etude des systèmes du 2ème ordre

5. Système oscillatoire $(0 < \xi < 1)$

▪ **Influence de la pulsation naturelle ω_n**



➢ Plus la pulsation ω_n est faible, plus la période des oscillations est grande

➢ Plus la pulsation ω_n est faible, plus la réponse du système est lente

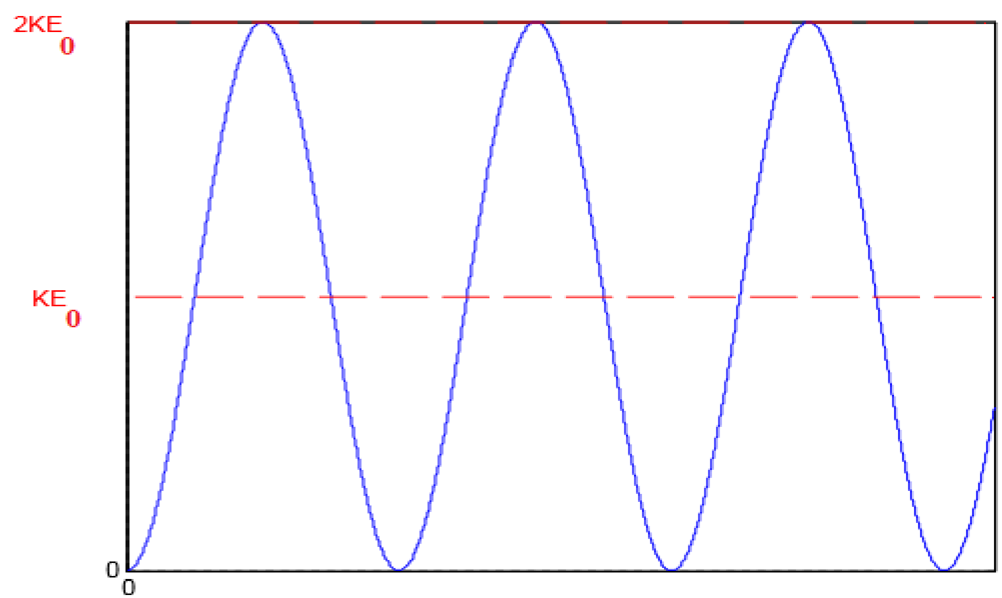
Etude des systèmes du 2ème ordre

6. Système juste oscillant ou critique $\xi = 0$

$$\xi = 0 \Rightarrow D(s) = s^2 + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \lambda_1 = j\omega_n \\ s_2 = \lambda_2 = -j\omega_n \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{on a } H(s) = \dfrac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \\ T_1 = -\dfrac{1}{\lambda_1} \text{ et } T_2 = -\dfrac{1}{\lambda_2} \end{array}\right\}$$

<u>Cas général</u> $\mathbf{y}(t) = kE_0 \left[1 - \cos \omega_n t\right]$



Etude des systèmes du 2ème ordre

7. Exemples d'application

- **Exemple 1**

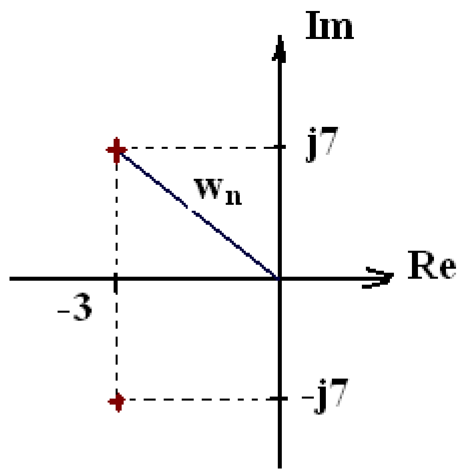
Soit la fonction de transfert suivante:

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100}$$

Calculer les caractéristiques dynamiques du système.

- **Exemple 2**

Soit le lieu de pôle suivant:



Trouver l'expression de la FT et les caractéristiques du système.

Etude des systèmes du 2ème ordre

7. Exemples d'application

- **Exemple 3**

Soit la fonction de transfert suivante:

$$H(p) = \frac{3}{p^2 + 2}$$

1. **Déterminer les paramètre** (ξ, K, ω_n)
2. **Représenter la réponse indicielle pour un échelon d'amplitude 2.**
3. **Déduire la stabilité**

- **Exemple 4**

Soit la fonction de transfert suivante:

$$H(p) = \frac{3}{p^2 + 3p + 1}$$

Répondre aux mêmes questions que l'exercice 3.