# Chapitre 3 : Conduction en régime transitoire

## *Conduction avec températures limites imposées*

Le problème de conduction en régime transitoire peut être traité de deux manières: soit en utilisant la méthode des capacités regroupées (lumped capacity) en considérant le temps comme variable indépendante unique, soit en résolvant l'équation différentielle partielle directement qui est dans ce cas, fonction du temps et des coordonnées spatiales. Cette deuxième méthode est possible uniquement pour des géométries de simples formes (plaques, cylindres sphères...etc.). Prenant le cas d'un bloc infini, sans sources internes de chaleur ($Q \to 0$) et où la température est uniforme sur deux directions (y et z). Donc, le problème est unidimensionnel (distribution suivant x seulement) et transitoire ($\partial / \partial t \neq 0$). Dans ce cas, l'équation d'énergie (de chaleur), peut être donnée par:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad 1$$

En exprimant le coefficient de diffusivité thermique par a=(k/rC), l'équation (29) peut être récrite sou la forme suivante:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad 2$$

Supposant que le bloc infini d'épaisseur (2e) est initialement à la température uniforme ($T_i$).

A t=0, les surfaces sont brusquement refroidissent à $T=T_1$.
Introduisant la variable: $q=T-T_1$
L'équation (30) devient:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad 3$$

Avec les conditions:
1. initiales: à t=0, $T=T_1$
2. aux limites: 0<x<2e, $\theta = \theta_i = T_i - T_1$

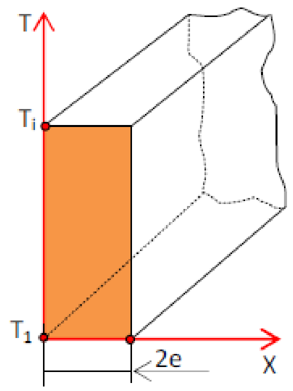

Figure 1 : Plaque infinie

$$\begin{Bmatrix} t > 0 \text{: à } x = 0, \theta = T_i - T_1 = 0 \\ t > 0 \text{: à } x = 2e, \theta = T_i - T_1 = 0 \end{Bmatrix}$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, la solution de l'équation (31), peut être donnée par le produit de deux fonctions: $\theta(x,t) = X(x).H(t)$
Ce qui conduit aux équations différentielles suivantes:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 & \quad 4 \\ \dfrac{dH}{dt} + \alpha\lambda^2 H = 0 & \quad 5 \end{cases}$$

Tel que ($\lambda^2$)est la constante de séparation. Pour satisfaire les conditions aux limites, il est nécessaire que ($\lambda^2$>0)

$$\boldsymbol{X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x} \qquad 6$$

$$\frac{dH}{dt} = -\alpha\lambda^2 H \Leftrightarrow \int \frac{dH}{H} = -\alpha\lambda^2 \int dt$$

$$\ln H = -\alpha\lambda^2 t + \ln C_3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{H}{C_3}\right) = -\alpha\lambda^2 t$$

$$\boldsymbol{H = C_3 e^{-\alpha\lambda^2 t}} \qquad 7$$

**Remarque**

Dans l'équation (34) si on prend ($\lambda^2 < 0$), $H = C_3 e^{\alpha\lambda^2 t}$ce qui conduit pour (t$\rightarrow\infty$) à (T$\rightarrow\infty$), ce qui est impossible pratiquement. Donc, la solution finale est donnée par:

$$\theta(x,t) = (C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x).C_3 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \theta(x,t) = (C_4 \cos\lambda x + C_5 \sin\lambda x).e^{-\alpha\lambda^2 t}} \qquad 8$$

$$\text{à } x = 0, t > 0: \theta(0,t) = (C_4 \overset{1}{\cos\lambda x} + C_5 \overset{0}{\sin\lambda x}).e^{-\alpha\lambda^2 t} = 0; e^{-\alpha\lambda^2 t} \neq 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\Rightarrow \theta(x,t) = (C_5 \sin\lambda x)e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\text{à } x = 2e, t > 0: \theta(2e,t) = (C_4 \cos\lambda 2e + C_5 \sin\lambda 2e).e^{-\alpha\lambda^2 t} = 0 = C_5 \sin(\lambda 2e)\, e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$e^{-\alpha\lambda^2 t} \neq 0, C_5 \neq 0 \Rightarrow \sin(\lambda 2e) = 0 \Leftrightarrow \lambda 2e = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{2e}, n = 1,2,3 \ldots\ldots$$

Donc, suivant les valeurs de n, il existe une infinité de solution sous forme de:

$$\boldsymbol{\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t}.\sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right)} \qquad 9$$

L'équation (37) est sous forme d'une série (en sinus) de Fourier et les valeurs de la constante ($C_n$), peuvent être déterminées par développement de la différence de température ($\theta_i$=$T_i$-$T_1$), en série de Fourier sur l'intervalle (0<x<2e).

$$\boldsymbol{\theta_i = \theta_i \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right)} \qquad 10$$

De la condition initiale, ($\theta_i$=$T_i$-$T_1$, t=0, 0<x<2e)

$$\boldsymbol{\theta(0,x) = \theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^0.\sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right)} \qquad 11$$

Par identification entre (38) et (39):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta_i}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right) \Leftrightarrow C_n = \frac{2\theta_i}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\right] = \frac{2\theta_i}{\pi}\frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{4\theta_i}{n\pi}, (n = 1,3,5 \ldots \ldots..)$$

La forme finale de la solution est donnée par:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\theta_i}{n\pi} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} . \sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right) = \frac{4\theta_i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} . \sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right) \Leftrightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha t} . \sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right)$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T-T_1}{T_i-T_1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2e}\right)^2 \alpha_t} . \sin\left(\frac{n\pi}{2e}x\right), (n = 1, 3, 5 \ldots..) \qquad 12$$