

Chapitre 2: Conduction unidimensionnelle en régime permanent

La conduction est la transmission de la chaleur à travers un corps sans déplacement de la matière. Le transfert de la chaleur comme l'énergie, est associée aux mouvements de vibration et de rotation des molécules et atomes, (énergie transformée en chaleur irréversiblement). Ce mode de transfert de chaleur peut être aisément modéliser et décrit mathématiquement.

Développement de l'équation différentielle générale de la conduction

Pour la description analytique ou mathématique, on doit premièrement développer l'équation générale de la conduction en coordonnées cartésiennes puis, avec le même principe, où en coordonnées cylindriques et sphériques, peuvent être déduites. Considérant un volume infinitésimal (dV) dans un système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z ; voir Fig.2). Le principe de conservation de l'énergie pour le volume de contrôle de la figure (Fig.2-1) pendant le temps dt , peut être formulé comme suit:

L'utilisation de la loi de Fourier permet d'exprimer les quantités de chaleur relativement à la section perpendiculaire à l'axe des (x par exemple).

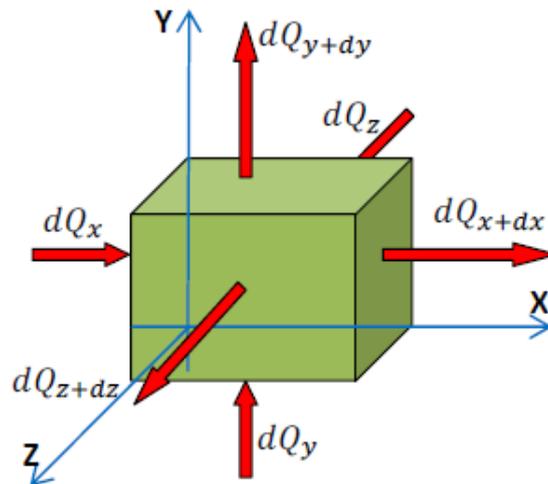


Figure 1 : Modèle de volume infinitésimal

- La chaleur transportée à travers la surface de gauche de (dV) dans la direction (x) est donnée par :

$$dQ_x = -k \cdot dydz \cdot \frac{\partial T}{\partial x}; (dy \cdot dz)$$

- La chaleur transportée (sortie) à travers la surface de droite de (dV) dans la direction (x) est donnée par :

$$dQ_{x+dx} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x}(dQ_x)dx + \dots; (\text{développement en série de Taylor})$$

$$dQ_{x+dx} = -k \cdot dydz \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \cdot dydz \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx$$

$$dQ_{x+dx} = -k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right] dydz$$

Le bilan énergétique sur l'élément (dV) implique que la chaleur transportée à travers la surface à gauche de (dV) dans la direction (x) plus la quantité de chaleur générée dans (dV) est égale à la chaleur transportée à travers la surface à droite de (dV) dans la direction (x) plus le changement en énergie interne.

Le bilan thermique relativement à l'axe des (X) est donnée par:

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -k \frac{\partial T}{\partial x} dydz + k \frac{\partial T}{\partial x} dydz + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx dy dz \Rightarrow$$

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx dy dz \quad 1$$

- Suivant l'axe des (y) :

$$\Rightarrow dQ_y - dQ_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \right] dx dy dz \quad 2$$

- suivant l'axe des (Z) :

$$\Rightarrow dQ_{xz} - dQ_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial T}{\partial z} \right] dx dy dz \quad 3$$

Suivant les trois directions, le bilan des quantités de chaleur transmises par conduction à travers le volume (dV) est donné par :

$$dQ_x - dQ_{x+dx} + dQ_y - dQ_{y+dy} + dQ_{xz} - dQ_{z+dz}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad 4$$

Soit la quantité $Q'(x,y,z,t)$ est défini comme étant, le taux de génération de l'énergie par unité de volume à l'intérieur du volume de contrôle.

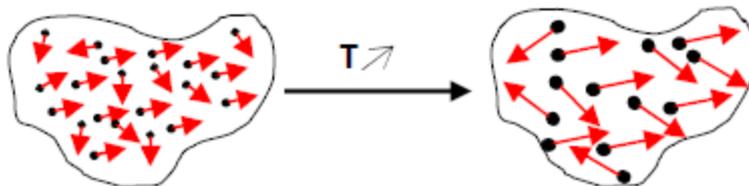
$$Q'(x, y, z, t) \quad 5$$

⇒ L'ensemble de la chaleur transmise par conduction et celle générée à l'intérieur du (VC), s'accouplent pour augmenter l'énergie interne de l'élément de volume (dV), avec la quantité (dQ) donnée par:

$$dQ = m \cdot c_p \cdot dT = \rho \cdot dv \cdot c_p dT = \rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad 6$$

($c_p = c$) : La chaleur spécifique du matériau.

D'où l'énergie interne provient du mouvement aléatoire des molécules dans le système de (volume, dv), le mouvement des molécules est fonction de la température donc, l'énergie interne est équivalente à une énergie thermique.



Le bilan énergétique final implique que :

La chaleur entrée par conduction(1) + La chaleur générée dans l'élément (dV) (2)=la chaleur dissipée par conduction (3) +le changement en énergie interne (4), (voir schéma ci-dessous).

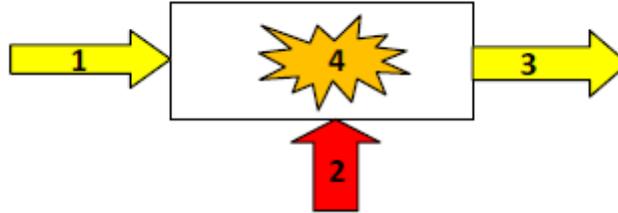


Figure 2 : Schéma de bilan énergétique

➤ Le bilan énergétique final est donné par [15 =14 +13]

$$\rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz + Q'(x, y, z, t) dx dy dz$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q'$$

7

- Puisque les propriétés des matériaux (K , ρ et C) sont des variables dépendantes des coordonnées (x , y et z) ainsi que le temps (t), cette équation générale de conduction(16) est valable même pour les milieux hétérogènes anisotropes.
- Pour les corps isotropes et homogènes, cette équation peut être arrangée sous formes suivantes

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q'}{\rho c}$$

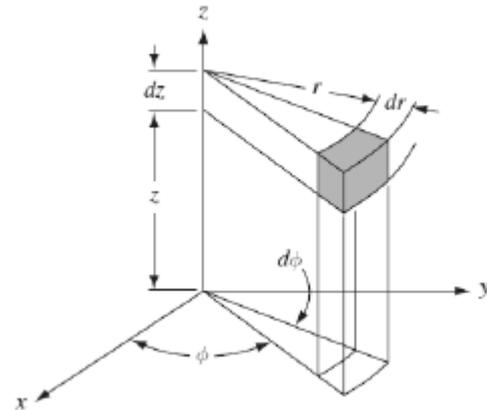
8

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \nabla^2 T + \frac{Q'}{\rho c}$$

9

Où $\alpha = \left(\frac{k}{\rho c} \right)$ est le coefficient de diffusivité thermique.

Equation différentielle générale de la conduction en coordonnées cylindriques



Soient :
$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

Figure 3 : Système de coordonnées cylindriques

⇒ L'équation générale de la chaleur (17) en coordonnées cylindriques s'écrit:

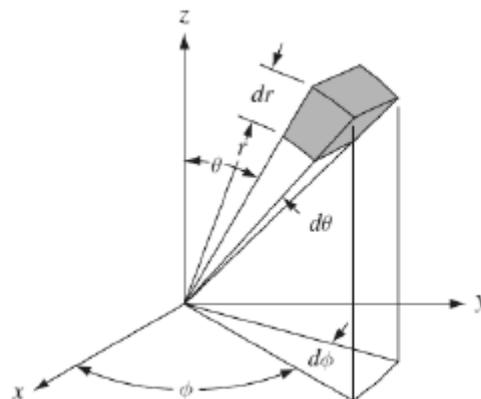
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q'}{\rho c} \quad 10$$

Equation différentielle générale de la conduction en coordonnées sphériques

Soient
$$\begin{cases} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

⇒ L'équation générale de la chaleur (17) en coordonnées sphériques s'écrit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right\} + \frac{Q'}{\rho c} \quad 11$$



Conditions aux limites

La formulation mathématique du problème de conduction par L'équation générale aux dérivées partielles (16, 19 et 20), n'a de sens physique que pour des conditions aux limites définies préalablement et qui reflètent l'évolution réel du phénomène.

Résolution de l'équation différentielle générale de la chaleur en régime permanent (conduction stationnaire) :

- En régime permanent ; $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$
- Sans source de chaleur ; $Q' \rightarrow 0$

Géométrie prismatique (le mur plan)

En plus des hypothèses précédentes, on suppose que :

- Le mur est considéré comme un milieu homogène et conducteur de l'énergie thermique.
- Le mur est limité par deux plans parallèles infinis, maintenus à une température uniforme sur chaque plan extrême.
- Une conduction unidimensionnelle ; $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 0; \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow 0$

L'équation (17) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

$$\int \frac{d}{dx}(T) dx = \frac{dT}{dx} = c_1$$

$$\int \frac{d}{dx}(T) dx = T(x) = c_1 x + c_2$$

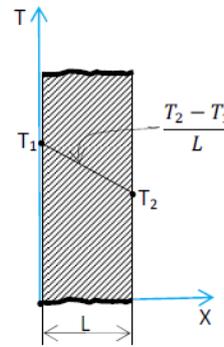


Figure 5 : Mur plan

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 , sont déterminées à partir des conditions aux limites ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } x = 0; \quad T(0) = T_1 = c_2 \\ \text{à } x = L; T(L) = T_2 = c_1 L + c_2 = c_1 L + T_1 \Rightarrow c_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{array} \right\}$$

La loi de Fourier permet d'exprimer le flux de chaleur par:

$$\phi = -k \cdot s \cdot \frac{dT}{dx}; \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L} \Rightarrow \phi = k \cdot s \cdot \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Le rapport: $\Delta T / \Delta x$ représente la pente de la droite sur la figure (Fig.6) ci-dessus.

Géométrie cylindrique (cylindre creux à surfaces latérales isothermes)

Le transfert de chaleur se fait dans une seule direction (r) ;

L'équation (19) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\int \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr = r \frac{dT}{dr} = c_1$$

$$\int dT = c_1 \int \frac{dr}{r} \Rightarrow T(r) = c_1 \ln(r) + c_2$$

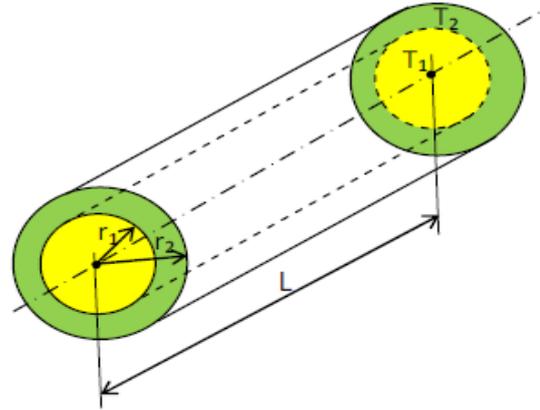


Figure 6 : Cylindre creux

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 , sont déterminées à partir des conditions aux limites ci-dessous:

$$\begin{cases} \text{à } r = r_1: T(r_1) = T_1 = c_1 \ln(r_1) + c_2 & (a) \\ \text{à } r = r_2: T(r_2) = T_2 = c_1 \ln(r_2) + c_2 & (b) \end{cases}$$

$$(a) - (b): T_1 - T_2 = c_1 (\ln(r_1) - \ln(r_2)) = c_1 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \Rightarrow c_1 = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)}$$

En remplaçant C_1 par son expression dans (a), nous obtenons C_2 par:

$$c_2 = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \ln(r_1) / \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right).$$

En remplaçant C_1 par son expression dans (b), nous obtenons C_2 par:

$$c_2 = T_2 - (T_1 - T_2) \cdot \ln(r_2) / \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right).$$

$$\Rightarrow T(r) = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \ln(r) + T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \ln(r_1) / \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \cdot \ln \frac{r}{r_1} + T_1$$

$$\Rightarrow T(r) = T_1 + \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \cdot \ln \frac{r}{r_1} \quad 12$$

- L'expression de la densité de flux thermique est donnée par:

$$\varphi = -k \frac{dT}{dr} = -k \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \cdot \frac{1}{r} = -k \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

- L'expression de flux thermique est donnée par:

$$\phi = \varphi \cdot s = -k \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi kL = 2\pi kL \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

- L'expression de la résistance thermique est donnée par: $R = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi kL}$

Géométrie sphérique (Sphère creuse à surfaces isothermes)

Avec les hypothèses précédentes et en supposant que le transfert de chaleur se fait dans une seule direction (r), l'équation (20) se réduit à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2(rT)}{dr^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rT)}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr}(rT) \right] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[T + r \frac{dT}{dr} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} \right] = 0$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

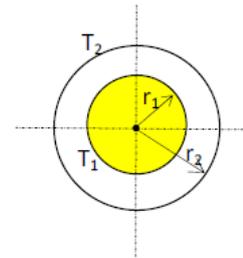


Figure 7 : Sphère creuse

On peut déterminer la solution par changement de variables:

$$u = \frac{dT}{dr} \Rightarrow u' = \frac{d^2T}{dr^2}$$

$$ru' + 2u = 0$$

$$r \frac{du}{dr} + 2u = 0 \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -2 \int \frac{dr}{r} \Leftrightarrow \ln(u) = -2 \ln(r) + \ln c_1 = -\ln r^2 + \ln c_1 = \ln\left(\frac{c_1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{c_1}{r^2} = \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow dT = c_1 \frac{dr}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

Pour déterminer les constantes C_1 et C_2 , on doit utiliser les conditions aux limites relatives au cas considéré :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } r = r_1: T(r_1) = -\frac{c_1}{r_1} + c_2 = T_1 \quad (a) \\ \text{à } r = r_2: T(r_2) = -\frac{c_1}{r_2} + c_2 = T_2 \quad (b) \end{array} \right.$$

$$(a) - (b) = T_1 - T_2 = -\frac{c_1}{r_1} + \frac{c_1}{r_2} = -c_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow c_1 = -\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

En remplaçant C_1 par son expression dans (a), on trouve l'expression de C_2 :

$$T_1 = -\frac{c_1}{r_1} + c_2 = \frac{\frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}}{r_1} + c_2 \Rightarrow c_2 = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \cdot r_1$$

- L'expression finale de la température est donnée par :

$$T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2 = \frac{(T_1 - T_2) \frac{1}{r}}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} + T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) r_1} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right] + T_1$$

$$\Rightarrow T(r) = T_1 + (T_1 - T_2) \cdot \frac{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

- L'expression de la densité de flux thermique est donnée par :

$$\varphi = -k \frac{dT}{dr} = k \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \cdot \frac{1}{r^2}; \quad \frac{dT}{dr} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right)$$

- L'expression de flux thermique est donnée par :

$$\Phi = \varphi \cdot s = -k \cdot s \frac{dT}{dr}; \quad \frac{dT}{dr} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right); \quad s = 4\pi r^2$$

$$\Phi = -k \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) = 4\pi k \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{4\pi k}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}}$$

- L'expression de la résistance thermique est donnée par : $R = \frac{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{4\pi k}$

Théorie des ailettes

L'évacuation de la chaleur par le transfert conducto-convectif à partir des corps solides peut être potentiellement amélioré par extension des surfaces d'échange. La procédure d'extension de ces surfaces a une large application industrielle (ailettes attachées aux équipements de transfert de chaleur, afin d'augmenter le taux de chauffage ou de refroidissement). Il existe dans les corps généralement longs (où l'une des dimensions est très supérieure par rapport aux deux autres) et où le transfert se réalise dans ce cas aussi par les surfaces latérales.

Application des ailettes longues

Le flux de chaleur évacué d'un système par transfert *conducto-convectif*, dépend du type de fluide utilisé (eau ou air) et du type de convection considérée (forcée ou libre). Pour augmenter ce flux, on doit augmenter artificiellement la surface d'échange entre le système et ce fluide. On dispose ainsi, des ailettes sur la surface de la pièce nue. Par exemple (ailettes des radiateurs de chauffage central, les ailettes destinées à refroidir un thyristor, composant électronique de puissance).

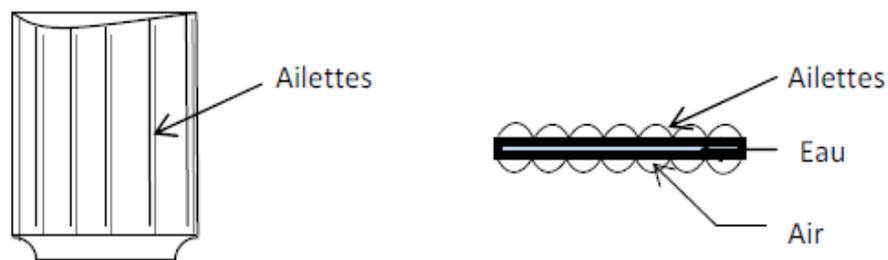


Figure 8 : Exemples d'application des ailettes

Développement de l'équation générale pour une ailette unidimensionnelle

- Considérons une tige attachée à un mur de température (T_0) comme le montre la figure ci-dessous (**Fig.10**). La base de la tige est chauffée en permanence par une source de chaleur (Q par unité de volume). Dans ce cas, deux processus se manifestent avec le temps, une diffusion de l'énergie (chaleur) le long de la tige et une déperdition de chaleur à travers la surface latérale dans le milieu environnant à la température ambiante (T_a).

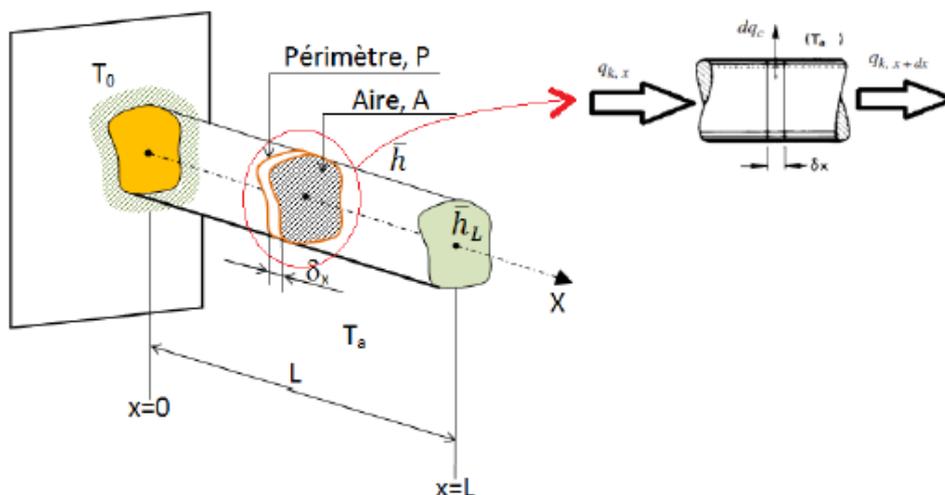


Figure 9 : Analyse unidimensionnelle de bilan thermique à travers une tige longue à extrémité chauffée

- Admettons les paramètres ci-dessous relatifs au problème considéré:
 - p : le périmètre de la section droite de la tige, ($p=\pi.d$) ;
 - k : la conductivité thermique [$W/m.K$] ;
 - h : le coefficient d'échange convectif [$W/m^2.K$] ;
 - T_a : la température ambiante [K] ;
 - S : la surface de la section droite de la tige, ($S=\pi.d^2/4$).

En appliquant le premier principe de la thermodynamique pour écrire le bilan énergétique sur un élément de volume (S.dx) :

$$\phi_x - \phi_{x+dx} - \phi_L + Q' \cdot s \cdot dx = 0 \quad 13$$

$$-k \cdot s \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_x + k \cdot s \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - h \cdot p \cdot dx \cdot [T(x) - T_a] + Q' \cdot s \cdot dx = 0$$

$$-k \cdot s \cdot \frac{dT}{dx} + k \cdot s \cdot \frac{dT}{dx} + k \cdot s \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx}\right) dx - h \cdot p \cdot dx [T(x) - T_a] + Q' \cdot s \cdot dx = 0$$

Après développement, simplification et arrangement:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx}\right) - \frac{hp}{ks} [T(x) - T_a] + \frac{Q'}{k} = 0 \quad 14$$

Dans le cas où, $Q'=0$, en mettant : $m^2 = \frac{hp}{ks}$ l'équation (23) devient:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - m^2 [T(x) - T_a] = 0 \quad 15$$

Mathématiquement, (24) est une équation différentielle linéaire et homogène de deuxième ordre à coefficients constants, par conséquent, la solution générale peut être exprimé sous les deux formes d'expressions suivantes:

$$T(x) - T_a = Ach(mx) + Bsh(mx) \quad 16$$

Ou
$$T(x) - T_a = Ce^{-mx} + De^{mx} = 0 \quad 17$$

Pour évaluer les constantes (A, B, C et D), il est nécessaire de spécifier les conditions aux limites appropriées.

Solution de l'équation générale de conduction pour les ailettes unidimensionnelles

La recherche d'une solution élémentaire pour ce phénomène dépend des conditions aux limites relatives à cet élément. La base de l'ailette est supposée maintenue à la température de la paroi fixe (mur), (T_0). Cependant, et selon les conditions aux limites relatives à l'extrémité libre, plusieurs cas peuvent se présenter:

1. Dans le cas où l'ailette (la tige) est très longue, la température de l'extrémité approche celle du milieu environnant;
2. L'extrémité de l'ailette peut être isolée;
3. L'extrémité de l'ailette peut être maintenue à une température fixe ou imposée
4. L'extrémité de l'ailette peut être le siège d'un transfert convectif de chaleur

Considérons ce dernier cas: Le flux dans ce cas est dissipé par la surface latérale de la section droite extrême (flux convectif).

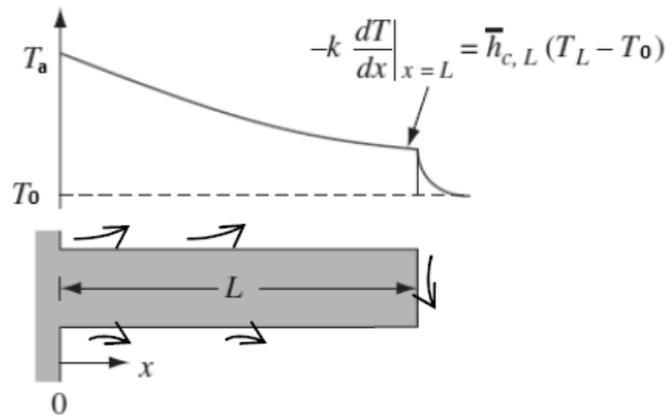


Figure 10 : Représentation schématique du transfert conducto-convectif par ailette unidimensionnelle

A partir de l'équation (24), la solution peut être donnée par:

$$T(x) - T_a = Ach(mx) + Bsh(mx) \quad 25'$$

Les conditions aux limites relatives au cas considéré, sont données dans ce cas par :

- à $x = 0$, $T(0) = T_0$, remplacées dans (25'), donne :

$$T_0 - T_a = A \underset{1}{ch}(m \underset{0}{0}) + B \underset{0}{sh}(m \underset{0}{0})$$

$$\Rightarrow A = T_0 - T_a$$

- à $x=L$, le flux convectif ($h.S.(T(L)-T_a)$) est égal au flux transmis par conduction à travers la section droite extrême $\left(-k.S.\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L}\right)$

$$hS(T_L - T_a) = -k.S.\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L}$$

$$h(T_L - T_a) = -k\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L}$$

$$T(x) - T_a = Ach(mx) + Bsh(mx)$$

$$T(x) - T_a = (T_0 - T_a)ch(mx) + Bsh(mx)$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = m(T_0 - T_a)sh(mx) + Bsh(mx)$$

$$\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)_{x=L} = m(T_0 - T_a)sh(mL) + Bsh(mL)$$

$$\Rightarrow h(T_0 - T_a) = -k.m(T_0 - T_a).sh(mL) - k.Bsh(mL)$$

Et puisque (à partir de (25') : $(T_L - T_a) = (T_0 - T_a)sh(mL) + Bsh(mL)$
 $h((T_0 - T_a)ch(mL) + Bsh(mL)) = -k.m(T_0 - T_a).sh - k.Bsh(mL)$
 $B(hsh(mL) + kmch(mL)) = -(T_0 - T_a)[hch(mL) + kmsh(mL)]$
 $B = \frac{-(T_0 - T_a)[hch(mL) + kmsh(mL)]}{hsh(mL) + kmch(mL)}$

La solution dans ce cas est donnée par:

$$T(x) - T_a = (T_0 - T_a) \left[ch(mx) - \frac{\frac{h}{km}ch(mL) + msh(mL)}{\frac{h}{km}sh(mL) + ch(mL)} \cdot sh(mx) \right]$$

Soit, $G = \frac{h}{km}$

$$\begin{aligned} \frac{T(x) - T_a}{(T_0 - T_a)} &= \left[ch(mx) - \frac{Gch(mL) + msh(mL)}{Gsh(mL) + ch(mL)} \cdot sh(mx) \right] \\ &= \left[\frac{Gsh(mL)ch(mx) + ch(mx)ch(mL) - Gch(mL)sh(mx) - sh(mL)sh(mx)}{Gsh(mL) + ch(mL)} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{T(x) - T_a}{(T_0 - T_a)} = \left[\frac{Gsh[m(L-x) + ch(L-x)]}{ch(mL) + Gsh(mL)} \right]$$

Flux total

Le flux de chaleur réalisé ou diffusé par conduction le long de la tige à partir de la base, doit être dans ce cas, égal à celui dissipé par convection à travers la surface latérale et la section droite extrême de l'ailette.

$$\Phi_{tcd} = \Phi_{tcv}$$

$$-ks \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = kms(T_0 - T_a) \frac{sh(mL) + Gch(mL)}{ch(mL) + Gsh(mL)} = \int_0^L hp (T(x) - T_a) dx + hs[T(L) - T_a]$$

Après développement, simplification et arrangement, le flux de chaleur est donné par:

$$\Phi = kms(T_0 - T_a) \cdot \frac{th(mL) + G}{1 + Gth(mL)} \quad 18$$

L'efficacité de l'ailette

Par définition, l'efficacité de l'ailette est donnée par: $\varepsilon = \frac{\Phi_{échangé}}{\Phi_{max}}$; $\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{échangé} = hpL(T_0 - T_a) \\ \Phi_{max} = \Phi_t \end{array} \right\}$

Après certaines arrangements mathématiques de simplification, l'expression finale de l'efficacité est donnée par:

$$\varepsilon = \frac{th(mL) + G}{mL + Gth(mL)} \quad 19$$