Institut de maintenance et de Sécurité Industrielle
(IMSI – Oran)

Cours

Méthodes Numérique

Licence 2(ELM)

Chapitre 1

Méthodes de Résolution des Systèmes Linéaires

1.1 Introduction

Soit le système linéaire Ax=b, où A une matrice carrée de dimension (n×n), x et b des vecteurs colonnes à n composantes, avec

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2, \dots \dots, n\,; j = 1,2, \dots \dots, m)$$

Le système ci-dessus s'écrit encore :

$$\begin{cases} a11x1 + a12x2 + \cdots + a1nxn = b1 \\ a21x1 + a22x2 + \cdots + a2nxn = b2 \\ \\ an1 + an2 + \cdots \dots . + annxn = bn \end{cases}$$

Résoudre le système Ax=b c'est trouver des vecteurs x, vérifiant le système.

Il existe deux types de méthodes :

- Méthodes directes : obtenir la solution en un nombre fini d'opérations.
- Méthodes itératives : permet de construire une suite (xn)n qui converge vers la solution.

1.2 Méthodes directes

1.1.1 **Méthode de Gauss**

La méthode de Gauss permet de transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieurs. Pour cela on passe par les étapes suivantes :

a) Construction de la matrice [Ab]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_P \end{array}\right]$$

b) Transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

- Une matrice triangulaire supérieure à coefficients réels est une matrice carrée dont les valeurs sous la diagonale principale sont nulles

c) Résolution du système triangulaire :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(x1= ?, x2= ?, ……., xn= ?)

Etape1 : Système linéaire triangulaire :

- Utilisation de l'algorithme du Pivot de Gauss.

Algorithme de Triangulation :

```
Pour k=1 à n-1
    Pivot=akk
      Si (pivot <> 0) alors
          Pour i=k+1 à n
               bi=bi – ((aik/pivot) * bk)
                  pour j=k+1 à n faire
                      aij=aij – ((aik/pivot) * akj)
                  fin pour
          fin pour
      fin si
fin pour
```

Exercice 1 :

Résoudre le système par la méthode de Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

- Li représente la i^{eme} ligne
- Les termes diagonaux sont appelés pivots
- Le pivot est toujours différent de 0
- Si pivot=0, on permute deux lignes

Solution :

<u>K=1, pivot= a11=2</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} L1' \\ L2' \\ L3' \end{array}$$

Avec :

L1'=L1

L2'= $= L2J - \left(\left(\frac{aik}{pivot}\right) * Lkj\right) = L2j - \left(\left(\frac{a21}{2}\right) * L1j\right)$

L3'= $L3j - \left(\left(\frac{aik}{pivot}\right) * Lkj\right) = L3j - \left(\left(\frac{a31}{2}\right) * L1j\right)$

<u>K=2, pivot= a22= -2</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} L1 \\ L2'' \\ L3'' = L3'j - \left(\left(\frac{aik}{pivot}\right) * Lkj\right) = L3'j - \left(\left(\frac{a32}{-2}\right) * L2j\right) \end{array}$$

Etape 2 : résolution du système linéaire :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} L1 \\ L2'' \\ L3'' = L3'j - \left(\left(\frac{aik}{pivot}\right) * Lkj\right) = L3'j - \left(\left(\frac{a32}{-2}\right) * L2j\right) \end{array}$$

Etape 2 : résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} a11x1 + a12x2 + \cdots .. + a1nxn = b1 \\ \quad a22x2 + \cdots .. + a2nxn \qquad = b2 \\ \quad \vdots \\ \qquad annxn = bn \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xn = \frac{bn}{ann} \\ \\ xi = 1/aii(bi - \sum_{j=i+1}^{n} aij * xj \end{cases}$$

<u>Algorithme de résolution du système linéaire :</u>

Xn=bn/ann

Pour i=n-1 à 1 faire

  Somme =bi

    Pour =i+1 à n faire

      Somme=somme – aij xj

    Fin pour

Fin pour

Suite de la solution de l'exercice 1 :

$$\begin{cases} 2x1 + 3x2 - x3 = 5 \\ \quad -2x2 - x3 = -7 \\ \qquad -5x3 = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x1 = 1 \\ x2 = 2 \\ x3 = 3 \end{cases}$$

1.1.2 Méthode de Gauss-Jordan

Principe :

Soit le système linéaire Ax=b, où A représente une matrice carrée (n×n).

Le principe est de transformer la matrice A en une matrice identité,

Ax=b →I.x=b' →x=b'

1) Trouver la matrice augmentée [A In]
2) Rechercher la matrice inverse A^{-1}, tel que : $A*A^{-1}=I$
3) Procéder comme pour l'élimination de gauss, mais en annulant à chaque étape tous les éléments de la colonne considérée situé au dessous et au dessus de la diagonale.

Pour n=3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} a11 & a12 & a13 & 1 & 0 & 0 & b1 \\ a21 & a22 & a23 & 0 & 1 & 0 & b2 \\ a31 & a32 & a33 & 0 & 0 & 1 & b3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & & b1' \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} & b2' \\ 0 & 0 & 1 & & b3' \end{array}\right)$$

Exercice 2:

Résoudre le système linéaire de l'exercice 1par la méthode de Gauss-Jordan

Solution :

K=1, pivot=2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

K=2, pivot= -2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 2 & 0 & -5/2 & -2 & 3/2 & 0 & -11 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 3 & 1 & -15 \end{array}\right)$$

K=3, pivot=-5

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 2 & 0 & 0 & -5/2 & 0 & -1/2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 2/5 & -1/5 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 3 & 1 & -15 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/4 & 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/5 & 1/10 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3/5 & -1/5 & 3 \end{array}\right)$$

Avec :

$$I = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad A^{-1} = \begin{matrix} -5/4 & 0 & -1/4 \\ 1/2 & -1/5 & 1/10 \\ 1 & -3/5 & -1/5 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Déterminant :

$$\det(A) = (-1)^p \prod aii = 2 * (-2) * (-5)$$

det(A) = -20

1.3 Méthodes itératives

Lorsque n est très grand, la résolution d'un système d'ordre n par les méthodes directes devient assez compliquée. Alors on fait appel aux méthodes dites itératives sous réserve de convergence.

Les méthodes itératives permettent de définir une suite de vecteurs $X^{(k)}$ convergente vers la solution exacte x du système linéaire Ax=b.

$X^{(0)} \longrightarrow X^{(1)} \longrightarrow X^{(2)} \ldots\ldots\ldots\ldots X^{(k)} \longrightarrow X^{(k+1)}$

1.2.1 Méthodes de point fixe

- Pour résoudre le système linéaire Ax=b, on décompose A sous la forme :

A=M – N avec M inversible (déterminant <>0).

Alors : $Ax=b \Leftrightarrow (M-N)\,x=b \Leftrightarrow Mx - Nx=b \Leftrightarrow Mx = Nx + b$

Donc : $$\mathbf{x = M^{-1}\,N\,x + M^{-1}\,b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

On est alors ramené à un problème de point fixe définit dans l'équation 1:

Pour (k+1) itérations, la relation de récurrence s'écrit :

$$\mathbf{x^{(k+1)} = M^{-1}\,N\,x^{(k)} + M^{-1}\,b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(2)}$$

- Décomposition de la matrice A : **A= D- E – F**

  Avec :

  D : diagonale de la matrice A

  E : Matrice triangulaire inferieur

  F : matrice triangulaire supérieur

Pour :

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & A13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} \qquad on\ a:$$

$$D = \begin{pmatrix} a11 & 0 & 0 \\ 0 & a22 & 0 \\ 0 & 0 & a33 \end{pmatrix} \qquad E = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a21 & 0 & 0 \\ a31 & a32 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = -\begin{pmatrix} 0 & a12 & a13 \\ 0 & 0 & a23 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Méthode de Jacobi :

On considère un système linéaire Ax=b avec A inversible, on pose A= M – N avec M=D et

N =E+F (d'âpres la décomposition A= D- E – F).

On a: **$X^{(k+1)} = M^{-1} N X^{(k)} + M^{-1} b$ ……………………………………………………….. (3)**

A partir de la décomposition: A= D- E – F ⇔ A= D – (E+F)

On pose : A= M-N avec :

A=D……………………………….. (4)

N= E+F …………………………….(5)

On remplace (4) et (5) dans (3) :

$X^{(k+1)} = D^{-1} (E + F) x^{(k)} + D^{-1} b$ ………………………………………………………….. …(6)

D'où : **$J=D^{-1} (E+F)$** est la matrice de Jacobi associée à la matrice A.

Pour n=3 :

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a11 \\ 1/a22 \\ 1/a33 \end{pmatrix} \left[-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a21 & 0 & 0 \\ a31 & a32 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a12 & a13 \\ 0 & 0 & a23 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b1/a11 \\ b2/a22 \\ b3/a33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a11 \\ 1/a22 \\ 1/a33 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & -a12 & -a13 \\ -a21 & 0 & -a23 \\ -a31 & -a32 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b1/a11 \\ b2/a22 \\ b3/a33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{b1}{a11} + 1/a11(-a12\, x_2^k - a13\, x_3^k) \\ x_2^{k+1} = \dfrac{b2}{a22} + 1/a22(-a21\, x_1^k - a23\, x_3^k) \\ x_3^{k+1} = \dfrac{b3}{a33} + 1/a33(-a31\, x_1^k - a32\, x_2^k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{b1}{a11} - \left(\dfrac{a12}{a11} x_2^k + \dfrac{a13}{a11} x_3^k\right) \\ x_2^{k+1} = \dfrac{b2}{a22} - \left(\dfrac{a21}{a22} x_1^k + \dfrac{a23}{a22} x_3^k\right) \\ x_3^{k+1} = \dfrac{b3}{a33} - \left(\dfrac{a31}{a33} x_1^k + \dfrac{a32}{a33} x_2^k\right) \end{cases}$$

Algorithme :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donnée} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{bi}{aii} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{aij}{aii}\, x_j^k \end{cases}$$

1.2.3 Méthode de Gauss-Seidel :

Soit la relation de récurrence :

On a: $\mathbf{X^{(k+1)} = M^{-1} N X^{(k)} + M^{-1} b}$

Avec: $\mathbf{M=D - E}$ et $\mathbf{N=F}$

On obtient la relation suivante :

$\mathbf{X^{(k+1)} = (D-E)^{-1} F x^{(k)} + (D-E)^{-1} b}$

Où : $\mathbf{(D-E)^{-1} F}$ représente la matrice de Gauss –Seidel associée à la matrice A.

Tel que :

$$D = \begin{pmatrix} a11 & 0 & 0 \\ 0 & a22 & 0 \\ 0 & 0 & a33 \end{pmatrix} \qquad E = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a21 & 0 & 0 \\ a31 & a32 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = -\begin{pmatrix} 0 & a12 & a13 \\ 0 & 0 & a23 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a: $\mathbf{(D-E)\, x^{(k+1)} = F x^{(k)} + b}$

$$\begin{pmatrix} a11 & 0 & 0 \\ 0 & a22 & 0 \\ 0 & 0 & a33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a21 & 0 & 0 \\ -a31 & -a32 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a12 & -a13 \\ 0 & 0 & -a23 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a11 & 0 & 0 \\ a21 & a22 & 0 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - a12\, x_2^k - a13\, x_3^k \\ -a23\, x_3^k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{b1}{a11} - \dfrac{a12}{a11} x_2^k - \dfrac{a13}{a11} x_3^k \\[2ex] x_2^{k+1} = \dfrac{b2}{a22} - \dfrac{a21}{a22} x_1^{k+1} - \dfrac{a31}{a22} x_3^k \\[2ex] x_3^{k+1} = \dfrac{b3}{a33} - \dfrac{a31}{a33} x_1^{k+1} - \dfrac{a32}{a33} x_2^{k+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{b1}{a11} - \displaystyle\sum_{\substack{j>i \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{a1j}{a11} x_j^k \\[2ex] x_2^{k+1} = \dfrac{b2}{a22} - \dfrac{a21}{a22} x_1^{k+1} - \dfrac{a23}{a22} x_3^k \\[2ex] x_3^{k+1} = \dfrac{b3}{a33} - \displaystyle\sum_{j<i} \dfrac{a3j}{a33} x_j^{k+1} \end{cases}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{bi}{aii} - \sum_{j>i} aij\, x_j^k - \sum_{j<i} aij\, x_j^{k+1}$$

Algorithme de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donnée} \\[2ex] x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{aii}\left(bi - \displaystyle\sum_{j>i} aij\, x_j^k - \sum_{j<i} aij\, x_j^{k+1} \right) \end{cases}$$