Les coéfficients de Fourier $a_0(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ lorsqu'ils existent, sont définie par les relations suivantes :

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt,$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt, \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

Remarque 4.3.2 (*Importante*)

- *Si la fonction f est* ***pair,*** *on a :* [$f(-x) = f(x)$]

$$a_0(f) = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)dt, \quad a_n(f) = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt, \text{ pour tout } n \geqslant 1,$$

$$b_n(f) = 0, \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

- *Si la fonction f est* ***impaire,*** *on a :* [$f(-x) = -f(x)$]

$$a_0(f) = 0, \quad a_n(f) = 0, \text{ pour tout } n \geqslant 1,$$

$$b_n(f) = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cancel{\cos}\sin(n\omega t)dt, \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

Exemple 4.3.3 *On considère la fonction f de période 2π, telle que : $f(t) = |t|$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. Cette fonction est monotone par morçeaux et bornée, donc elle admet un développement en série de Fourier.*

Déterminons ces coéfficients.

Remarquons que cette fonction est pair, donc $b_n(f) = 0$, pour tout $n \geqslant 1$.

Alors

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

et

$$a_n(f) = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt, \quad \omega = 1.$$

D'après l'intégration par parties, on obtient :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \begin{cases} 0, & si\ n = 2p \\ -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}, & si\ n = 2p+1 \end{cases}$$

Donc, le développement de f en série de Fourier est donnée par : $f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)$.