Critère de comparaison avec une intégrale Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue, décroissante et positive. On pose $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$u_1 = f(1), u_2 = f(2), u_3 = f(3), \ldots, u_N = f(n), \ldots$$

Alors

$$\left(\sum_{n \geqslant 0} u_n\right) \text{CV} \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ CV}.$$

Exemple 4.1.8 *Considérons l'application $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$.*
L'application f est continue, décroissante et positive sur $[1, +\infty[$.
On a : $\int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln t$ et $\lim_{t \to +\infty} (\ln t) = +\infty$, en déduit donc, que la série $\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\right)$ diverge, car $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Séries de Riemann et séries de Bertrand

- On appalle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme $u = \frac{1}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- On appalle série de Bertrand toute série dont le terme général est de la forme $u = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $n \geqslant 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.1.1 *Les séries de Riemann et les séries de Bertrand sont donc des séries à termes positifs.*

- Une série de Riemann $\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\right)$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$ et diverge si, et seulementsi $\alpha \leqslant 1$.
- Une série de Bertrand $\left(\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}\right)$ converge si, et seulement si $\beta > 1$ et diverge si, et seulementsi $\beta \leqslant 1$.

cv si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)
div si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$)