Définition 4.1.2 *Si la suite* $(\sum_{i=1}^{n} u_i)$ *admet une limite, on dit que la série (1) est convergente. La limite de série* $(\sum_{i=1}^{n} u_i)$ *est appelée somme de la série (1) et est notée* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. *Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.*

Exemple 4.1.1 (***Série géométrique***)

Considérons le terme général de cette série donné par : $u_n = aq^n$ $(a \neq 0)$. *La somme partielle est donnée par :*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} aq^i = a\frac{1-q^n}{1-q}, \quad (q \neq 1).$$

La série $\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n\right)$ *est convergente ssi* $|q| < 1$, *et sa somme vaut* $\frac{a}{1-q}$, *et divergente ssi* $|q| \geqslant 1$.

4.1.2 Condition nécessaire de convergence d'une série

Théorème 4.1.1 *Si une série converge, son terme géénéral tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.*

Exemple 4.1.2 *Soit la série :* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$. *Le terme général* $u_n = \frac{1}{2^n}$. *Il est clair que cette série est une série géométrique convergente, car* $q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$. *Et on a :* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$.

Corollaire 4.1.1 *Si le terme général* u_n *d'une série ne tend pas vers zéro lorsque n tend vers* $+\infty$, *la série diverge.*

Exemple 4.1.3 *La série* $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$ *diverge, car* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

4.1.3 Séries à termes positifs

Définition 4.1.3 *Une série* $\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n\right)$ *est dite à terme positifs si* $u_n \geqslant 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.