Transformée de Laplace de la translation

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de Laplace $L(f)(s)$. On considère la fonction f_α définie par : $f_\alpha(t) = f(t-\alpha)$; $(\alpha > 0)$.

Proposition 5.2.2

$$L(f_\alpha)(s) = e^{-\alpha t} L(f)(s).$$

Transformée de Laplace de l'homothétie

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de Laplace $L(f)(s)$. On considère la fonction f_k définie par : $f_k(t) = f(kt)$.

Proposition 5.2.3

$$L(f_k)(s) = \frac{1}{k} Lf(\frac{s}{k}).$$

Transformée de Laplace des dérivées

Proposition 5.2.4 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $\sigma(f)$ son abscisse de convergence absolue.*

On suppose :

(i) $f \in C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$.

(ii) Il existe $M > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout entier $k \leqslant n$ on a $\left|f^{(k)}(t)\right| \leqslant Me^{at}$.

Alors

$$a) \quad \sigma(f^{(k)}) \leqslant a, \;\; k = 0, 1, ..., n.$$

$$b) \quad L\{\, f^{(n)}\,(t)\,;\; s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0).$$

En particulier :

Si $n = 1$, on obtient : $L\{\, f'\,(t)\,;\; s\} = sF(s) - f(0)$.

Si $n = 2$, on obtient : $L\{\, f''\,(t)\,;\; s\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.

Si $n = 3$, on obtient : $L\{\, f^{(3)}\,(t)\,;\; s\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$.