5.1.2 Conditions d'existence

$F(s)$ est définie par une intégrale généralisée, donc il faut que :

- F soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
- $\exists \beta \in]0, 1[$ tels que $\lim_{t\to 0} t^{\beta} |f(t)| = 0$.
- La fonction f est d'ordre exponentiel : $|f(t)e^{-st}| < Me^{-(\mathrm{Re}\, s-\alpha)t}$ or $\int_0^{\infty} e^{-(\mathrm{Re}\, s-\alpha)t} f(t)dt$ converge pour $\mathrm{Re}\, s > \alpha$.

Remarque 5.1.1 *Certaines fonctions ne possèdent pas de transformée de Laplace, par exemple la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ qui ne respecte pas la deuxième condition d'existence, ou $f(t) = e^{t^2}$ qui n'est pas d'ordre exponentielle.*

Exemple 5.1.1 *Si $f(t) \equiv 1$ pour $t \geqslant 0$, alors*

$$\begin{aligned} L(1)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\tau} \\ &= \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \left[\frac{e^{-s\tau}}{-s} + \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{s}, \qquad \Re(s) > 0. \end{aligned}$$

Donc, pour $s \in \mathbb{R}$ et $s > 0$, on a :

$$L\{1;\ s\} = \frac{1}{s}.$$

Définition 5.1.3 *La transformée inverse de Laplace est donnée par :*

$$f(t) = L^{-1}(F)(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \qquad c = \mathrm{Re}(s) > c_0,$$

où c_0 réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace.

5.2 Propriétés de la transformée de Laplace

Linéarité

Proposition 5.2.1 *Soit f, g : $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $L(f)$ et $L(g)$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors*

$$L\{ af + bg\} = aL(f) + bL(g),$$