On pose $u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \sin(nx) \Rightarrow v = -\dfrac{\cos(nx)}{n}$

donc $(*) = \dfrac{-4}{\pi n}\left[\left(-x\dfrac{\cos(nx)}{n}\right)_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \dfrac{\cos(nx)}{n}\,dx\right]$

$= \dfrac{-4}{\pi n}\left[-\pi\dfrac{\cos(n\pi)}{n} + \underbrace{\left(\dfrac{\sin(nx)}{n^2}\right)_0^{\pi}}_{=0}\right]$

$= \dfrac{-4}{\pi n}\left[-\pi\dfrac{(-1)^n}{n}\right] = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$

Donc le developpement en série de fourier pour la fct f est donnée par :

$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \quad (**)$

b) 1) Pour la somme $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

Dans $(**)$ on remplace x par π, on obtient

$\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi)$

$= \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ car $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \pi^2 - \dfrac{\pi^2}{3} = \dfrac{2\pi^2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2\pi^2}{3}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi^2}{6}}$