3) La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^n$

on a $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(n+1)^3 (n!)^3} \times \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = 27 = \ell$$

comme $R = \frac{1}{\ell} \Rightarrow R = \frac{1}{27}$

exo n° 5 :

a) Nous voyons que la fct f est paire, donc les coefficients $b_n = 0$, il reste seulement à calculer les coefficients a_0 et a_n.

Alors $a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$

on va utiliser l'intégrale par parties pour calculer les coefficients a_n : Alors

$$a_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \left(\frac{1}{n} \sin(nx) \right)' dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \underbrace{\left[x^2 \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} (\sin nx) 2x \, dx$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} (\sin(nx)) \, 2x \, dx = -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin(nx) \, dx \; (*)$$

on fait une autre intégration par parties