et ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{1}{n+x}\right|\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}|h_n(x)-e^{-x}|=0$ on en

deduit que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cvu sur $[0,1]$

exo n°4

1) La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n}x^n$

on a : $a_n=\frac{n^2+1}{3^n}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}=\frac{1}{3}=\ell$$

Comme $R=\frac{1}{\ell}$, on obtient le rayon $R=3$

et $\Delta=]-3,3[$

2) La serie $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2}x^n$ on a $a_n=e^{-n^2}$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-n^2-2n-1}}{e^{-n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{-2n-1}=0=\ell$$ Comme

$R=\frac{1}{\ell}\Rightarrow R=\infty$