INTERETS COMPOSES (suite)

1 - Valeur actuelle d'un capital placé pendant un nombre entier de périodes

L'actualisation est l'opération inverse de la capitalisation. Elle permet de déterminer la valeur acquise C_n à une période quelconque, antérieure à la date n où ce capital doit être payé.

$$\mathbf{C = Cn\ (1+i)^{-n}}$$

Exemple :

Quelle est la valeur actuelle au taux de 9%, d'une somme de 60.000 U/M payable dans 12 ans.

$$C = C_{12}(1+i)^{-12}$$

$$C = 60.000(1{,}09)^{-12}$$

$$C = 60.000(0{,}355534)$$

$$\boldsymbol{C = 21.332{,}04\ UM}$$

L'actualisation connaît une grande application dans le calcul de la rentabilité des investissements. En effet un investissement est généralement décidé à la suite d'une étude technico-économique faisant ressortir, face à la somme décaissée au moment de l'investissement, les flux monétaires que rapporte cet investissement dans le temps.

***Exemple* :**

Montant décaissé pour l'investissement en 2020 = 100.000 U/M.

Calendrier des flux monétaires récupérés à la suite de l'activité.

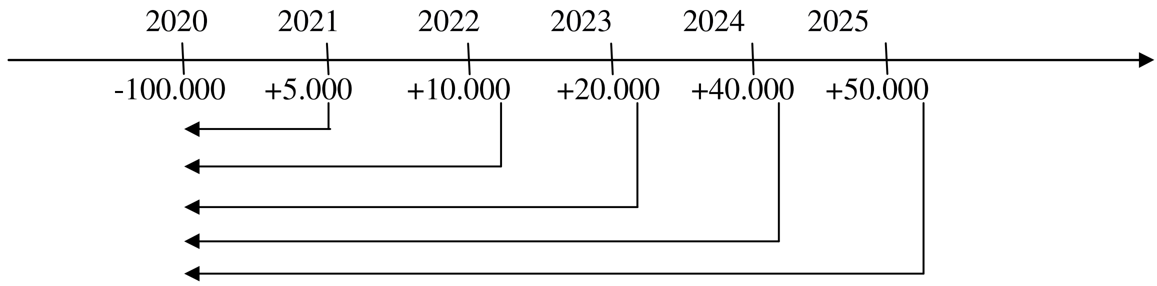
Année	2021	2022	2023	2024	2025
Flux monétaires	5.000	10.000	20.000	40.000	50.000

A la fin de la $5^{ème}$ année, il est supposé que l'investissement prend une valeur nulle et qu'il n'y a plus de flux encaissé.

Au taux d'actualisation de 9%, cet investissement est-il financièrement rentable ?

Pour répondre à cette question, il faut comparer la valeur décaissée (investissement) et les flux financiers générés par cet investissement.

Pour que la comparaison ait un sens, il faut qu'elle se fasse à une même période. La décision d'investissement devant être prise dans le présent, la comparaison doit se faire au présent. Donc, il y a lieu de ramener les flux monétaires futurs au présent, d'où le principe d'actualisation.



L'actualisation permet d'additionner les flux encaissés chaque année et de comparer la somme obtenue au décaissement réalisé au moment de l'investissement. Elle permet à un taux bien choisi de comparables des sommes encaissées en des périodes différentes.

	2021	**2022**	**2023**	**2024**	**2025**
Valeur initiale	5.000	10.000	30.000	40.000	50.000
Taux d'actualisation	$(1,09)^{-1}$	$(1,09)^{-2}$	$(1,09)^{-3}$	$(1,09)^{-4}$	$(1,09)^{-5}$
Valeur actualisée	4.587,15	8.416,79	15.443,66	28.337	32.496,55
Somme actualisée cumulée	4.587,15	13.003,94	28.0447,60	56.784,60	89.281,15

Au taux d'actualisation de 9% cette opération d'investissement n'est pas intéressante financièrement, puisqu'en contrepartie d'un décaissement initial de 100.000 U/M, il n'est espéré de récupérer que 89.281,15 U/M.

NB : Cette méthode de calcul s'applique lorsque les flux monétaires ne sont pas constants.

2 – L'escompte à intérêts composés

L'escompte à intérêts composés s'applique aux effets dont l'échéance est supérieure à un an. Dans le cas des intérêts simples, l'escompte est obtenu par la différence entre les valeurs nominale et actuelle. Ce principe demeure valable dans le cas des intérêts composés, seul change le mode de calcul de la valeur actuelle.

L'escompte est la différence entre la valeur nominale de l'effet et la valeur actuelle à intérêts composés.

La différence entre les valeurs des escomptes commercial et rationnel est faible dans le cas de l'intérêt simple. L'escompte à intérêts composés est fondé sur des durées très nettement supérieures, de sorte que cette différence est notablement accrue. Dans le cas présent, l'application du principe de l'escompte commercial pénaliserait excessivement le vendeur de l'effet, aussi a-t-on préféré de lui substituer celui de l'escompte rationnel.

Soit :
V : la valeur nominale de l'effet,
E : le montant de l'escompte à intérêts composés,
a : la valeur actuelle de l'effet ;
i : le taux de l'escompte,
n : la durée de l'escompte exprimée en année.
Par définition l'escompte est égal à :

$$\mathbf{E = V - \mathit{a}}$$

On a :

$$a = V(1+i)^{-n}$$

$$E = V - V(1+i)^{-n}$$

$$E = V[1 - (1+i)^{-n}]$$

Exemple :

Déterminer, au taux de 6%, l'escompte et la valeur actuelle d'un bon de caisse payable dans 4 ans et de valeur nominale égale à 500.000 U/M.

Valeur actuelle :

$$a = V(1+i)^{-n}$$

$$a = 500.000(1{,}06)^{-4}$$

$$a = 396.046{,}83\ UM$$

Valeur de l'escompte :

$$E = V - a$$

$$E = 500.000 - 396.046{,}83$$

$$E = 103.953{,}17\ UM$$

3 – Equivalence de capitaux à intérêts composés

Contrairement aux intérêts simples, l'équivalence à intérêts composés se vérifie quelle que soit la date à la quelle elle est établie. En effet, si deux ou plusieurs valeurs actuelles s'égalisent à une date donnée, cette égalité sera de nouveau effective à une date quelconque, pour des valeurs différentes des précédentes.

3.1. Equivalence de deux capitaux

Deux capitaux évalués au même taux sont équivalents si, à une date quelconque, leurs valeurs actuelles à intérêts composés sont égales.

Désignons par :

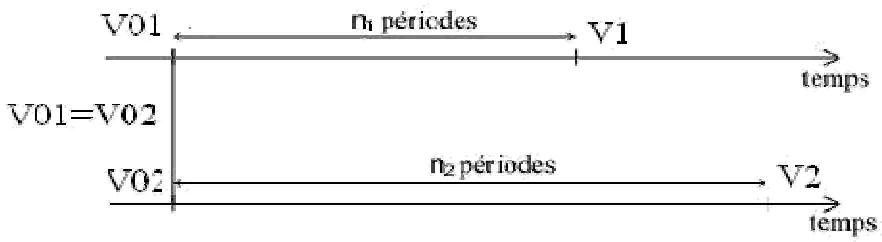
V_1 et V_2 : les valeurs nominales respectives des capitaux 1 et 2.

n_1 et n_2 : le nombre de périodes au terme desquelles les deux capitaux sont payables ;

i : le taux d'actualisation,

Si l'équivalence s'établie à l'origine, l'instant zéro, l'égalité des valeurs actuelles s'écrit :

$$\mathbf{V1\ (1+i)^{-n1} = V2\ (1+i)^{-n2}}$$



Les problèmes d'équivalence portent généralement sur la recherche des valeurs V_1 ou V_2, n_1 ou n_2.

Exemple :

1- Un débiteur désire rembourser par anticipation dans trois ans, une dette de 50.000 U/M payable dans 6 ans. Déterminer la somme qu'il devra débourser au taux de 10%.

$$50.000\ (1,1)^{-6} = V_2\ (1,1)^{-3}$$

$$V_2 = \frac{50.000(1,1)^{-6}}{(1,1)^{-3}}$$

$$V_2 = 37.565,74\ UM$$

2- Un débiteur décide de s'acquitter d'une dette de 20.000 U/M, payable dans 6 ans par un règlement de 16.528,93 U/M.

Déterminer au taux de 10%, la date à laquelle doit être opéré ce paiement.

$$20.000(1,1)^{-6} = 16.528,93(1,1)^{-n2}$$

$$(1,1)^{-n2} = \frac{20.000(1,1)^{-6}}{16.528,93}$$

$$(1,1)^{-n2} = 0,683013$$

En utilisant la table financière N° 2, on trouve que cette valeur correspond à

n2 = 4 ans

Le calcul peut se faire aussi, ainsi :

$$20.000(1,1)^{-6} = 16.528,93(1,1)^{-n2}$$

$$-n2\log(1,1) = \ log20.000 - 6\log(1,1) - \ log16.528,93$$

$$n2 = \frac{[6\log(1,1) + \ log16.528,93 - log20.000]}{\log(1,1)}$$

$$n2 = 4\ ans$$

3.2. <u>Equivalence d'un capital avec la somme de plusieurs autres</u>

Un capital est équivalent à la somme de plusieurs autres si, à une date quelconque, la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux.

Désignons :

V : la valeur nominale du capital unique ;

n : le nombre de périodes du terme desquelles le capital unique est payé ;

V_k : la valeur nominale de $k^{ième}$ capital du groupe avec k=1,….,p

n_k : le nombre de périodes au terme desquelles le capital k est payé, avec k=1,…,p

i : le taux d'actualisation

L'équivalence à l'instant zéro entre le capital unique et le groupe de capitaux s'écrit :

$$\mathbf{V\ (1+i)^{-n} = \sum Vk\ (1+i)^{-nk}} \qquad \text{(de k=1 jusqu'à p)}$$

Remarque:

Les problèmes fondés sur l'égalité de la valeur actuelle d'un capital unique avec la somme des valeurs actuelles d'un groupe de capitaux, impliquent généralement la recherche de la valeur nominale de ce capital unique, ou parfois de son échéance. Dans ces deux cas de figures, l'échéance, donnée ou à déterminer, est une échéance commune.

***Exemple* :**

Déterminer, au taux de 10%, la valeur nominale d'un paiement unique, échéant dans 7 ans, destiné à remplacer les dettes suivantes :

V_1 = 1000 U/M n_1 =2 ans ;

V_2 = 2000 U/M n_2 =4 ans ;

V_3 = 3000 U/M n_3 =6 ans ;

L'équivalence à l'instant zéro s'écrit :

$$V\ (1,1)^{-7} = 1.000(1,1)^{-2} + 2.000(1,1)^{-4} + 3.000(1,1)^{-6}$$

$$V = \frac{1.000(1,1)^{-2} + 2.000(1,1)^{-4} + 3.000(1,1)^{-6}}{(1,1)^{-7}}$$

$$V = 7.572,51\ UM$$

3.3. Cas particulier de l'échéance moyenne

A l'instar du cas similaire développé dans le cadre des équivalences à l'intérêt simple, l'échéance moyenne constitue un cas particulier des problèmes d'échéances communes.

Il s'agit de l'échéance du capital unique dont la valeur nominale est constituée par la somme de celles des capitaux remplacés.

Par définition la valeur nominale du capital unique est égale à :

$$V = \sum V_k \text{ (de k=1 à p)}$$

L'équivalence à l'instant zéro s'écrit :

$$V(1+i)^{-n} = \sum V_k(1+i)^{-nk}$$

$$(1+i)^{-n} = \frac{\sum V_k(1+i)^{-nk}}{V}$$

***Exemple*:**

Calculer, au taux de 10%, l'échéance moyenne des capitaux suivants:

V_1= 1.000 U/M, n_1 = 2 ans,

V_2=3.107 U/M, n_2 =3 ans,

V3= 2.000 U/M, n_3= 4 ans,

V_4 = 3.000 U/M, n_4 = 6 ans,

$$V = \sum_1^4 V_k = 1.000 + 3.107 + 2.000 + 3.000$$

$$V = 9.107\ UM$$

$$9.107(1{,}1)^{-n} = 1.000(1{,}1)^{-2} + 3.107(1{,}1)^{-3} + 2.000(1{,}1)^{-4} + 3.000(1{,}1)^{-6}$$

$$(1{,}1)^{-n} = \frac{1.000(1{,}1)^{-2} + 3.107(1{,}1)^{-3} + 2.000(1{,}1)^{-4} + 3.000(1{,}1)^{-6}}{9.107}$$

$$(1{,}1)^{-n} = 0{,}683016$$

En utilisant la table financière N° 2, on trouve que cette valeur correspond à

n = 4 ans

Le calcul peut se faire aussi, ainsi :

$$(1{,}1)^{-n} = \frac{1.000(1{,}1)^{-2} + 3.107(1{,}1)^{-3} + 2.000(1{,}1)^{-4} + 3.000(1{,}1)^{-6}}{9.107}$$

$$(1{,}1)^{-n} = \frac{6.220{,}23}{9.107}$$

$$n = \frac{log 9.107 - log 6.220{,}23}{log 1{,}1} = 3{,}9999$$

Soit *n = 4 ans*

La distance moyenne entre l'échéance (qui est la moyenne) et la date d'équivalence (l'instant zéro) est 4ans.

3.4. Equivalence de deux groupes de capitaux

Le principe de l'équivalence est ici étendu au cas de deux groupes de capitaux. Le traitement de cet aspect ne présente pas de difficultés formelles majeures. Il semble donc plus indiqué de l'illustrer par un exemple, après avoir rappeler que les interrogations en l'espèce portent généralement sur la valeur nominale ou l'échéance de l'un des capitaux appartenant à l'un ou l'autre des deux groupes. L'exemple développé ci-après est fondé sur la recherche de la valeur nominale.

Exemple :

Un débiteur et son créancier s'entendent pour liquider les dettes suivantes :

$V_1 = 1.000$ U/M, $n_1 = 2$ans,

$V_2 = 3.107$ U/M, $n_2 = 3$ans,

V3 = 2.000 U/M, $n_3 = 4$ans,

$V_4 = 3.000$ U/M, $n_4 = 6$ans,

Il est convenu que le débiteur procédera à un premier paiement de 5.000 U/M dans 3 ans et soldera définitivement cet encours par un second paiement qui doit intervenir deux ans après le premier.

Quel doit en être le montant si le taux appliqué est de 6%.

$$5.000(1{,}06)^{-3} + V(1{,}06)^{-5} = 1.000(1{,}06)^{-2} + 3.107(1{,}06)^{-3} + 2.000(1{,}06)^{-4} + 3.000(1{,}06)^{-6}$$

$$V = \frac{1.000(1{,}06)^{-2} + 3.107(1{,}06)^{-3} + 2.000(1{,}06)^{-4} + 3.000(1{,}06)^{-6} - 5.000(1{,}1)^{-3}}{(1{,}06)^{-5}}$$

$$V = 4.014{,}23\ UM$$