exo n°4

1) on a $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$

La fct f est définie si $x > 0$ ou $y \neq 0$

donc $D_f = \{(x,y) : x > 0$ ou $y \neq 0\}$

Calculons les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \frac{-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

2) Montrons que la fct u vérifie l'équation donnée.

on a $u(x,t) = [g(xt)]^2$ alors $\partial_t u(x,t) = 2g(xt)x$

et $\partial_x u(x,t) = 2g(xt)t$.

$t\,\partial_t u(x,t) - x\partial_x(x,t) = 2t\,g(xt)x - 2xg(xt)t$

$= 0$

Par conséquent l'équation est réalisée.