جامعة محمد بن أحمد – وهران 2 - كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى ليسانس السداسي الثاني 2019 - 2020

حل التطبيق رقم : 2 في مادة الإحصاء 2

الانحدار و الارتباط الخطيين Corrélation et régression linéaires

حل التمرين رقم 1:

استهلاك x	استهلاك y	$xiyi$	x_i^2	y_i^2
70	50	3500	4900	2500
50	69	3450	2500	4761
51	70	3570	2601	4900
40	80	3200	1600	6400
41	81	3321	1681	6561
55	65	3575	3025	4225
56	66	3696	3136	4356
52	67	3484	2704	4489
58	64	3712	3364	4096
60	65	3900	3600	4225
65	67	4355	4225	4489
598	744	39763	33336	51002

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{598}{11} \mapsto \boxed{\bar{x} = 54{,}363}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{744}{11} \mapsto \boxed{\bar{y} = 67{,}636}$$

1) حساب التباين المشترك بين x و y :

$$cov(x,y) = \frac{\sum xiyi}{N} - (\bar{x}.\bar{y}) = \frac{39763}{11} - (54{,}363 \times 67{,}636) \mapsto \boxed{\mathrm{cov(t,y)} = -62{,}077} < 0$$

العلاقة بين التغيرين x و y سالبة ⇐ x و y يتغيران في اتجاه معاكس.

2) حساب معامل الارتباط الخطي:

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y}$$

$$V(x) = \delta_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{33336}{11} - 54{,}362^2 = 75{,}21 \mapsto \boxed{\delta_x = 8{,}672}$$

$$V(y) = \delta_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{51002}{11} - 67{,}636^2 = 61{,}917 \Longmapsto \boxed{\delta_y = 7{,}868}$$

$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y} = \frac{-62{,}077}{8{,}672 * 7{,}868} = -0{,}909 < 0$ سالب.

التفسير : ارتباط عكسي قوي جدا بين استهلاك السلعةx واستهلاك السلعة y .اذن السلعتين x وy سلعتين بديلتين من الناحية الاقتصادية (الزبدة و المرغارين) لهما نفس المنفعة في نظر المستهلك (كلما نقص استهلاك السلعة x ازداد استهلاك السلعة y).

ملاحظة :

1)في حالة سلعتان بديلتان (الزبدة والمرغارين, اللحم و السمك) a و$\grave{a}$ سالبان:

سلعتان بديلتان $\begin{cases} a < 0 \\ \grave{a} < 0 \end{cases}$

2) في حالة سلعتان متكاملتان (الشاي و السكر) a و$\grave{a}$ موجبان:

سلعتان متكاملتان $\begin{cases} a > 0 \\ \grave{a} > 0 \end{cases}$

3) معامل التحديد :هو مقياس يبين او يقيس مدى تأثير المتغير المستقل x_i على المتغير التابع y_i :

$r_{x,y}{}^2 = a.a' = (-0{,}909)^2 = 0{,}862 * 100 = 82{,}6\%$

التفسير: يمكن القول ان استهلاك السلعة y يرجع بنسبة 82,6% الى استهلاك السلعة x اما النسبة الباقية و هي 17, 4% =(82.6-100) ترجع الى عوامل اخرى نجهلها.

ملاحظة :

$$0 \leq r_{x,y}{}^2 \leq 1$$

حل التمرين رقم 2 :

السنوات	xi	yi	$xiyi$	x_i^2	y_i^2
1980	*35,19*	*0,9*	*31,67*	*1238,330*	*0,81*
1981	39,54	3,6	142,34	1563,410	12,96
1982	35,5	4	142	1260,250	16
1983	30,6	5,6	171,36	936,360	31,36
1984	29,67	4,1	121,65	880,300	16,81
1985	29,11	5,2	151,37	847,400	27,04
1986	14,18	1	14,18	201,070	1
1987	18,72	-1,1	-20,6	350,440	1,21
1988	16,26	-1,8	-29,27	264,380	3,24
1989	18,41	-2,9	-53,39	338,920	8,41
المجموع	267,18	18,6	671,31	7880,860	118,84

1) معادلة الانحدار y على x :

$$y_i = a\,x_i + b$$

$$a = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^2};\quad b = \bar{y} - a\bar{X}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{267,18}{10} \Longmapsto \boxed{\bar{x} = 26,718};\qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{18,6}{10} \Longmapsto \boxed{\bar{y} = 1,86}$$

$cov(x,y) = \frac{\sum xiyi}{N} - (\bar{x}.\bar{y}) = \frac{671,36}{10} - (26,718 \times 1,86) \Longmapsto \boxed{\mathrm{cov}(x,y) = +17,436} > 0$ موجب

علاقة موجبة بين x وy . ان المتغيرين x و y يتغيران في نفس الاتجاه ⇐ كلما ارتفع سعر البترول ارتفع معدل النمو الاقتصادي في الجزائر.

$$\delta_x^2 = \mathrm{V}(x) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{7880,86}{10} - 26,718^2 = 74,235$$

$$a = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^2} = \frac{+17,436}{74,235} = +0,234$$

$$b = \bar{y} - a\bar{X} = 1,86 - (0,234 * 26,718) = -4,392$$

معادلة الانحدار Y على X : $y_i = 0,234\,x_i - 4,392$

2) حساب معامل الارتباط الخطي و معامل التحديد:

***حساب معامل الارتباط الخطي:**

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y}$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{118,84}{10} - 1,86^2} = 2,902$$

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y} = \frac{+17,436}{8,615*2,902} = +0,697$$

و هذا يعني ان هناك علاقة طردية متوسطة بين سعر البترول و معدل النمو الاقتصادي في الجزائر.

***معامل التحديد:**

$$r_{x,y}{}^2 = (0,697)^2 = 0,485 * 100 = 48,5\%$$

و هذا يعني ان 48,5% من تغير معدل النمو الاقتصادي السنوي في الجزائر يمكن تفسيره بتغير سعر البترول بينما النسبة المتبقية (51,5%=100-48,5) ترجع الى عوامل اخرى غير سعر البترول وهي غير مدرجة في المعادلة.

3) جودة معادلة الانحدار:

تكون المعادلة ذات جودة عالية لما:

ان المعادلة ليست ذات جودة عالية لان:

رغم ان المعادلة ليست ذات جودة عالية (باعتبار معامل الارتباط الجيد يجب ان يزيد عن 0,90 و معامل التحديد الجيد يجب ان يزيد عن 0,80) إلا اننا نستخدمها غي التنبؤ مثل ما هو مطلوب.

4) التنبؤ بمعدل النمو الاقتصادي عندما يكون سعر البترول 10 دولار:

$$y_i = 0{,}234\ (10) - 4{,}392 = -2{,}05$$

هذا يعني انه اذا كان متوسط سعر البترول في سنة من السنوات 10 دولار سيكون معدل النمو الاقتصادي لتلك السنة 2,5- (سالب).

التنبؤ بمعدل النمو الاقتصادي عندما يكون سعر البترول 30 دولار:

$$y_i = 0{,}234\ (30) - 4{,}392 = +2{,}62$$

هذا يعني انه اذا كان متوسط سعر البترول في سنة من السنوات 30 دولار سيكون معدل النمو الاقتصادي لتلك السنة 2,62+ (موجب).

حل التمرين رقم 3:

السنوات	xi	yi	$xiyi$	x_i^2	y_i^2
1970	14,7	37,37	549,339	216,09	1396,516
1971	17,6	43,63	767,888	309,76	1903,576
1972	19,8	64,9	1285,02	392,04	4212,01
1973	27,6	112,25	3098,1	761,76	12600,062
1974	98,2	186,5	18314,3	9643,24	34782,25
1975	100	140,25	14025	10000	19670,062
1976	107,1	134,75	14431,725	11470,41	18157,562
1977	115,8	164,95	19101,21	13409,64	27208,502
1978	119,1	226	26916,6	14184,81	51076
1979	177,9	512	91084,8	31648,41	262144
المجموع	797,8	1622,6	189573,982	92036,16	433150,64

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{797{,}8}{10} \Longmapsto \boxed{\bar{x} = 79{,}78\ \$};\ \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{1622{,}6}{10} \Longmapsto \boxed{\bar{y} = 162{,}25\ \$} \qquad (1$$

حساب التباين المشترك بينx وy :

$$cov(x,y) = \frac{\sum xiyi}{N} - (\bar{x}.\bar{y}) = \frac{189573{,}982}{10} - (79{,}78 \times 162{,}26) \Longmapsto \boxed{\mathrm{cov(t,y)} = 6012{,}296}$$

حساب معامل الارتباط الخطي:

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y}$$

$$V(x) = \delta_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{92036,16}{10} - 79,78^2 \Longmapsto \boxed{\delta_x^2 = 2838,768}$$

$$\Longmapsto \boxed{\delta_x = \sqrt{2838,768} = 53,28}$$

$$V(y) = \delta_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{433150,543}{10} - 162,26^2 \Longmapsto \boxed{\delta_y^2 = 16986,747}$$

$$\Longmapsto \boxed{\delta_y = \sqrt{16986,747} = 130,333}$$

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y} = \frac{6012,296}{53,28*130,333} = +0,865$$

ارتباط طردي قوي بين ثمن البترول x و ثمن الذهب y: $r_{x,y}$ فكلما ارتفع ثمن البترول x ارتفع معه ثمن الذهب بعلاقة قوية (طردية قوية).

اما مقارنته مع الارتباطات الاخرى فان الارتباط بين ثمن البترول x و ثمن الدولار z قوي (طردي قوي) لكنه اقل من $r_{x,y}$

$$r_{x,z} < r_{x,y} \Longleftarrow$$

اما الارتباط بين ثمن الذهب y و ثمن الدولار z قوي لكنه عكسي فكلما ارتفع ثمن الذهب y انخفض ثمن الدولار z .

2) معادلة الانحدار Y على X

فان معادلة الانحدار تكون دائما على الشكل (معادلة خط مستقيم).

$$y_i = a\, x_i + b$$

$$a = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^2}; \quad b = \bar{y} - a\bar{X}$$

$$a = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^2} = \frac{6012,296}{2838,768} = 2,117$$

$$b = \bar{y} - a\bar{X} = 162,26 - (2,117 * 79,78) = -6,634$$

معادلة الانحدار Yعلى X : $y_i = 2,117\, x_i - 6,634$

3) التنبؤ بثمن الذهب عندما يرتفع ثمن البترول الى 265,5 دولار في بداية 1980 :

اذن x=265,5 في

$$y_i = 2.117(265,5) - 6,634 = 555,429$$

ثمن الذهب في تلك الفترة $\boxed{y_i = 555,429\$}$

حل التمرين رقم 4 :

لحساب معامل الارتباط الخطي لدينا المعلومات التالية:

معادلة الانحدار y على x تسمح لنا بتحديد قيم a وb :

$$y_i = 0,84\, x_i + 21,28 \quad \mapsto \begin{cases} a = 0,84 \\ b = 21,28 \end{cases}$$

نعلم من ناحية اخرى ان:

$$\delta_x = 0,61,\ \delta_y = 1,22$$

المطلوب : حساب $r_{x,y} = ?$

حساب معامل الارتباط الخطي:

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y}$$

لحساب معامل الارتباط الخطي يجب ايجاد قيمة التباين المشترك بين x وy و هذا من خلال قانونa :

$$a = \frac{cov(x,y)}{\delta_x^2} \Longmapsto\ cov(x,y) = a * \delta_x^2 = 0{,}84 * 0{,}372 = 0{,}312$$

نعوض قيم التباين المشترك بين x و y و الانحراف المعياري ل x و y في قانون معامل الارتباط الخطي:

$$r_{x,y} = \frac{cov(t,y)}{\delta_x \delta_y} = \frac{0{,}321}{0{,}61 * 1{,}22} = +0{,}419$$