Exemple 3.3.3 *Soit* $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = u - 2v \end{cases}$$

On va calculer $\frac{\partial f}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial v}$. *Alors ;*

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$, $\frac{\partial x}{\partial u} = 2$, $\frac{\partial x}{\partial v} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -2$.

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 5x + 4y. \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = -3y. \end{aligned}$$

3.3.4 Equations aux Dérivées Partielles

Définition

Soit $u = u(x, y, ...)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes en nombre fini.

Une EDP pour la fonction u est une relation qui lie :

– les variables indépendantes $(x, y, ...)$.

– la fonction "inconnue" u (variable dépendante).

$$\Rightarrow F(x, y, ..., \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, ...) = 0,$$

u est solution de l'EDP si, après subsitution, la relation $F(x, y, ..., \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, ...) = 0$ est satisfaite pour $x, y, ...$ appartenant à une certaine région Ω de l'espace des variables indépendantes.

Exemple 3.3.4 $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, *avec* $u = u(x, y)$ *(équation de diffusion).*

$u_1(x, y) = 2x + y^2$ *solution dans tout* $\mathbb{R}^2$.

$u_2(x, y) = e^{-x} + \sin y$ *solution dans* $\mathbb{R}^2$.

$u_3(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} e^{\frac{-x^2}{4y}} + y^2$ *solution dans* $\Omega \begin{cases} x > 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$.