et $f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. On peut de même définir les dérivées secondes par rapport à y : $f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Exemple 3.3.1 *Soit :*

$$u(x,y) = x^3 + x^2 y - y^3.$$

On a : $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 6x + 2y$, $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = 2y$.

Théorème 3.3.1 (***Théorème de Schwarz***) *Si en un point de $A = [a,b]$, les dérivées successives f_{xy} et f_{yx} existent et sont continues, en ce point ces dérivées sont égales :*

$$f''_{xy} = f''_{yx} \quad soit \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Exemple 3.3.2 *Soit :*

$$u(x,y) = 2x^2 + xy + 3y^2.$$

On a : $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 4x + y$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y \partial x} = 1$, *et* $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x + 6y$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x \partial y} = 1$, *donc :*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

3.3.3 Dérivées d'une fonction composée de deux variables

Soit la fonction $F(x,y) = f(u,v)$, u et v étant des fonctions de x et y :

$$u = u(x,y) \qquad \text{et} \qquad v = v(x,y),$$

avec

$$u_0 = u(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad v_0 = v(x_0, y_0).$$

Si les fonctions u et v admettent des dérivées partielles en (x_0, y_0) et si $f(u,v)$ admet des dérivées partielles continues au voisinage de (u_0, v_0), alors $F(x,y)$ admet des dérivées partielles au point (x_0, y_0) données par :

$$\begin{aligned}
F'_x(x_0,y_0) &= f'_u(u_0,v_0)u'_x(x_0,y_0) + f'_v(u_0,v_0)v'_x(x_0,y_0) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\
F'_y(x_0,y_0) &= f'_u(u_0,v_0)u'_y(x_0,y_0) + f'_v(u_0,v_0)v'_y(x_0,y_0) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).
\end{aligned}$$