Calculons la fonction $B(x)$: En multipliant la première équation (1) par 2, on obtient :

$$\begin{cases} 2A'(x)e^{-2x} + 2B'(x)e^{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)' \\ -2A'(x)e^{-2x} + B'(x)e^{x} = e^{-x} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)' \end{cases}$$

Effectuer l'addition des nouvelles équations $(1)'$ et $(2)'$, nous avons :

$$3B'(x)e^{x} = e^{-x},$$

puis, on obtient :

$$B'(x) = \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

D'après l'intégration, on trouve :

$$B(x) = -\frac{1}{6}e^{-2x} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Calculons la fonction $A(x)$: En multipliant la première équation (1) par (-1), on obtient :

$$\begin{cases} -A'(x)e^{-2x} + -B'(x)e^{x} = 0 \ldots\ldots\ldots (1)'' \\ -2A'(x)e^{-2x} + B'(x)e^{x} = e^{-x} \ldots\ldots (2)'' \end{cases}$$

Effectuer l'addition des nouvelles équations $(1)''$ et $(2)''$, nous avons :

$$-3A'(x)e^{-2x} = e^{-x},$$

puis, on obtient :

$$A'(x) = -\frac{1}{3}e^{x}.$$

L'intégration sur les deux côtés de la dernière équation, donne :

$$A(x) = -\frac{1}{3}e^{x} + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière est donc obtenue pour $c_1 = c_1 = 0$, ainsi, nous obtenons :

$$y_p = \left(-\frac{1}{3}e^{x}\right)e^{-2x} + \left(-\frac{1}{6}e^{-2x}\right)e^{x},$$

ce qui donne :